

Introduction aux schémas Lagrangiens centrés

François Vilar

Institut Montpellierain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier

25 Novembre 2016



- 1 Introduction
- 2 Système d'équations de la dynamique des gaz en 1D
- 3 Schéma numérique d'ordre 1 en 1D
- 4 Extension à l'ordre élevé en 1D
- 5 Résultats numériques en 1D
- 6 Système d'équations de la dynamique des gaz en 2D
- 7 Schéma numérique d'ordre 1 en 2D
- 8 Extension à l'ordre élevé en 2D
- 9 Résultats numériques en 2D

Formalisme eulérien (description spatiale)

- Référentiel fixe attaché à l'observateur
- Zone d'observation fixe à travers laquelle le fluide s'écoule

Formalisme lagrangien (description matérielle)

- Référentiel mobile attaché à la matière
- Zone d'observation déplacée et déformée au gré de l'écoulement

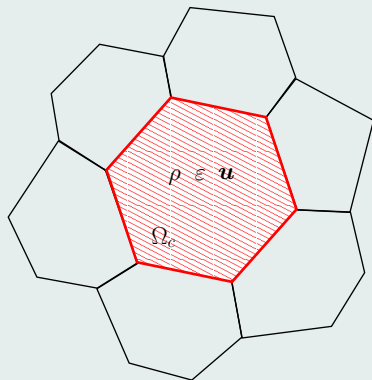
Avantages du formalisme lagrangien

- Adapté à l'étude de problèmes présentant de grandes déformations
- Suivi naturel des interfaces dans les écoulements multi-matériaux
- Pas de diffusion numérique de la discrétisation des termes de convection

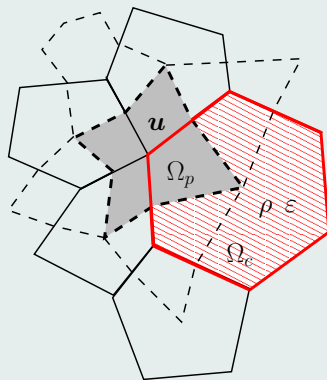
Inconvénients de formalisme lagrangien

- **Problème de robustesse en présence de vorticités ou cisaillements**
⇒ Méthodes ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian)

Formulation centrée



Formulation décalée



Schémas volumes finis sur maillage mobile

- J. K. Dukowicz: *CAVEAT scheme*, 1986
- B. Després: *GLACE scheme*, 2005
- P.-H. Maire: *EUCCLHYD scheme*, 2007
- J. Cheng: *High-order ENO conservative Lagrangian scheme*, 2007
- S. Del Pino: *Curvilinear finite-volume Lagrangian scheme*, 2010
- P. Hoch: *Finite volume method on unstructured conical meshes*, 2011
- A. J. Barlow: *Dual grid high-order Godunov scheme*, 2012

Schémas Galerkin discontinu sur maillage initial

- R. Loubère: *DG scheme for Lagrangian hydrodynamics*, 2004
- Z. Jia: *DG spectral finite element for Lagrangian hydrodynamics*, 2010
- **F. Vilar: *High-order DG scheme for Lagrangian hydrodynamics*, 2012**

- 1 Introduction
- 2 Système d'équations de la dynamique des gaz en 1D**
- 3 Schéma numérique d'ordre 1 en 1D
- 4 Extension à l'ordre élevé en 1D
- 5 Résultats numériques en 1D
- 6 Système d'équations de la dynamique des gaz en 2D
- 7 Schéma numérique d'ordre 1 en 2D
- 8 Extension à l'ordre élevé en 2D
- 9 Résultats numériques en 2D

Définitions

- ρ est la densité du fluide
- u est la vitesse du fluide
- e est l'énergie totale spécifique du fluide
- p est la pression du fluide
- $\varepsilon = e - \frac{1}{2}u^2$ est l'énergie interne spécifique du fluide

Équations d'euler

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$ Équation de continuité
- $\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$ Conservation du moment
- $\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u e + p u)}{\partial x} = 0$ Conservation de l'énergie

Fermeture thermodynamique

- $p = p(\rho, \varepsilon)$ Équation d'état

Conservation du moment

- $$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$
- $$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \underbrace{u \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right)}_{=0} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
- $$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Conservation de l'énergie

- $$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u e + p u)}{\partial x} = 0$$
- $$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \underbrace{e \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right)}_{=0} + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0$$
- $$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0$$

Définitions

- $\tau = \frac{1}{\rho}$ le volume spécifique
- $\mathbf{U} = (\tau, u, e)^t$ le vecteur solution
- $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (-u, p, \rho u)^t$ le vecteur flux

Équation de continuité

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$
- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- $\rho \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Système non conservatif de la dynamique des gaz

- $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0$

Référentiel mobile

- X est la position d'un point fluide dans sa configuration initiale
- $x(X, t)$ est la position actuelle de ce point, transporté par l'écoulement

Équation des trajectoires

- $\frac{\partial x(X, t)}{\partial t} = u(x(X, t), t)$
- $x(X, 0) = X$

Dérivée matérielle

- $f(x, t)$ est une variable fluide suffisamment régulière
- $\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f(x(X, t), t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x}$

Lagrangien mobile

- $\rho \frac{dU}{dt} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$

Configuration mobile

Définitions

- $J = \frac{\partial x}{\partial X}$ est le jacobien associé à l'écoulement
- ρ^0 est la densité initiale du fluide

Conservation de la masse

- $\int_{\omega(0)} \rho^0 dX = \int_{\omega(t)} \rho dx$
- $\int_{\omega(t)} \rho dx = \int_{\omega(0)} \rho J dX$
- $\rho J = \rho^0$

Lagrangien total

- $\rho^0 \frac{dU}{dt} + \frac{\partial F(U)}{\partial X} = 0$

Configuration fixe

Définitions

- $dm = \rho dx = \rho^0 dX$ la variable de masse
- $A(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$ la matrice Jacobienne du système
- $a = a(\rho, \varepsilon)$ la vitesse du son

Formulation conservative

- $\frac{dU}{dt} + \frac{\partial F(U)}{\partial m} = 0$

Formulation non conservative

- $\frac{dU}{dt} + A(U) \frac{\partial U}{\partial m} = 0$
- $\lambda(U) = \{-\rho a, 0, \rho a\}$ sont les valeurs propres de $A(U)$

- 1 Introduction
- 2 Système d'équations de la dynamique des gaz en 1D
- 3 Schéma numérique d'ordre 1 en 1D**
- 4 Extension à l'ordre élevé en 1D
- 5 Résultats numériques en 1D
- 6 Système d'équations de la dynamique des gaz en 2D
- 7 Schéma numérique d'ordre 1 en 2D
- 8 Extension à l'ordre élevé en 2D
- 9 Résultats numériques en 2D

Définitions

- $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ est une partition du domaine temporel $[0, T]$
- $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ est le $n^{\text{ème}}$ pas de temps
- $\omega^0 = \bigcup_{i=1, I} \omega_i^0$ est une partition de domaine initial ω^0
- $\omega_i^0 = [X_{i-\frac{1}{2}}, X_{i+\frac{1}{2}}]$ est une maille quelconque de taille ΔX_i
- $\omega_i^n = [x_{i-\frac{1}{2}}^n, x_{i+\frac{1}{2}}^n]$ est l'image de ω_i^0 au temps t^n à travers l'écoulement
- $m_i = \rho_i^0 \Delta X_i = \rho_i^n \Delta x_i^n$ est la masse, constante, de la maille ω_i
- $U_i^n = (\tau_i^n, u_i^n, e_i^n)^t$ est la solution discrète

Schéma volumes finis d'ordre 1

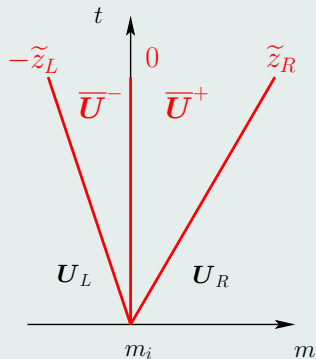
- $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t^n}{m_i} (\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n)$
- $x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = x_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta t^n \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n$

Flux numériques

- $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = (-\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n, \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^n, \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^n \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n)^t$

Linéarisation à deux états

$$\bullet \frac{dU}{dt} + A(U) \frac{\partial U}{\partial m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} + A(\tilde{U}_L) \frac{\partial U}{\partial m} = 0 & \text{si } m-m_i < 0 \\ \frac{dU}{dt} + A(\tilde{U}_R) \frac{\partial U}{\partial m} = 0 & \text{si } m-m_i > 0 \end{cases}$$



Problème de Riemann

Problème de Riemann simple

$$\bullet U(m, 0) = \begin{cases} U_L & \text{si } m-m_i < 0 \\ U_R & \text{si } m-m_i > 0 \end{cases}$$

$$\bullet U(m, t) = \begin{cases} U_L & \text{si } m-m_i < -\tilde{z}_L t \\ \bar{U}^- & \text{si } -\tilde{z}_L t < m-m_i < 0 \\ \bar{U}^+ & \text{si } \tilde{z}_R t > m-m_i > 0 \\ U_R & \text{si } m-m_i > \tilde{z}_R t \end{cases}$$

Relations

$$\bullet \tilde{z}_L = \tilde{\rho} \tilde{a}_L > 0, \quad \tilde{z}_R = \tilde{\rho} \tilde{a}_R > 0$$

$$\bullet \bar{u}^- = \bar{u}^+ = \bar{u}, \quad \bar{p}^- = \bar{p}^+ = \bar{p}$$

Flux numériques

- $\bar{u} = \frac{\tilde{z}_L u_L + \tilde{z}_R u_R}{\tilde{z}_L + \tilde{z}_R} - \frac{1}{\tilde{z}_L + \tilde{z}_R} (p_R - p_L)$
- $\bar{p} = \frac{\tilde{z}_R p_L + \tilde{z}_L p_R}{\tilde{z}_L + \tilde{z}_R} - \frac{\tilde{z}_L \tilde{z}_R}{\tilde{z}_L + \tilde{z}_R} (u_R - u_L)$

États intermédiaires

- $\bar{\tau}^- = \tau_L + \frac{\bar{u} - u_L}{\tilde{z}_L}$ et $\bar{\tau}^+ = \tau_R - \frac{\bar{u} - u_R}{\tilde{z}_R}$
- $\bar{e}^- = e_L - \frac{\bar{p}\bar{u} - p_L u_L}{\tilde{z}_L}$ et $\bar{e}^+ = e_R + \frac{\bar{p}\bar{u} - p_R u_R}{\tilde{z}_R}$

Solveur acoustique

- $\tilde{z}_L \equiv z_L = \rho_L a_L$
- $\tilde{z}_R \equiv z_R = \rho_R a_R$

Impédance acoustique à gauche

Impédance acoustique à droite

Combinaison convexe

- $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t^n}{m_i} (\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n) \pm \frac{\Delta t^n}{m_i} F(U_i^n) \pm \frac{\Delta t^n}{m_i} (\tilde{z}_{i+\frac{1}{2}}^- + \tilde{z}_{i-\frac{1}{2}}^+) U_i^n$
- $U_i^{n+1} = (1 - \lambda_i) U_i^n + \lambda_{i+\frac{1}{2}}^- \bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^- + \lambda_{i-\frac{1}{2}}^+ \bar{U}_{i-\frac{1}{2}}^+$

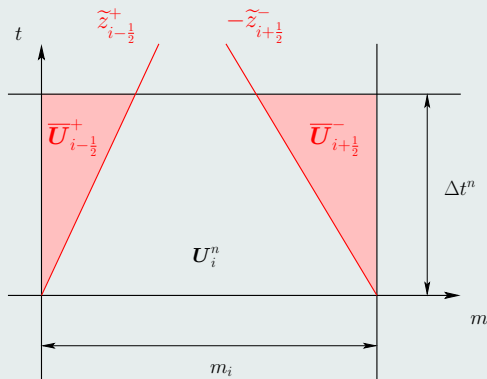


Illustration du schéma

Définitions

- $\lambda_{i\pm\frac{1}{2}}^\mp = \frac{\Delta t^n}{m_i} \tilde{z}_{i\pm\frac{1}{2}}^\mp$
- $\lambda_i = \lambda_{i+\frac{1}{2}}^- + \lambda_{i-\frac{1}{2}}^+$
- $\bar{U}_{i\pm\frac{1}{2}}^\mp = U_i^n \mp \frac{\bar{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^n - F(U_i^n)}{\tilde{z}_{i\pm\frac{1}{2}}^\mp}$

Condition CFL : $\lambda_i \leq 1$

- $\Delta t^n \leq \frac{m_i}{\tilde{z}_{i+\frac{1}{2}}^- + \tilde{z}_{i-\frac{1}{2}}^+}$
- $\Delta t^n \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x_i^n}{a_i^n}$ si $\tilde{z}_{i\pm\frac{1}{2}}^\mp \equiv z_i^n$

Schéma d'ordre 1 semi-discret en temps

- $$m_i \frac{dU_i}{dt} = -\left(\bar{F}(U_i, U_{i+1}) - \bar{F}(U_{i-1}, U_i)\right)$$

Relation de Gibbs

- $$T dS = d\varepsilon + p d\tau = de - u du + p d\tau$$

Production d'entropie au niveau semi-discret

- $$m_i T_i \frac{dS_i}{dt} = m_i \frac{de_i}{dt} + u_i m_i \frac{du_i}{dt} + p_i m_i \frac{d\tau_i}{dt}$$
- $$m_i T_i \frac{dS_i}{dt} = \tilde{z}_{i+\frac{1}{2}}^- (\bar{u}_{i+\frac{1}{2}} - u_i)^2 + \tilde{z}_{i-\frac{1}{2}}^+ (\bar{u}_{i-\frac{1}{2}} - u_i)^2 \geq 0$$

- 1 Introduction
- 2 Système d'équations de la dynamique des gaz en 1D
- 3 Schéma numérique d'ordre 1 en 1D
- 4 Extension à l'ordre élevé en 1D**
- 5 Résultats numériques en 1D
- 6 Système d'équations de la dynamique des gaz en 2D
- 7 Schéma numérique d'ordre 1 en 2D
- 8 Extension à l'ordre élevé en 2D
- 9 Résultats numériques en 2D

Extension à l'ordre élevé du schéma volumes finis

- MUSCL, (W)ENO, DG, ...

Schéma sur les valeurs moyennes

- $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t^n}{m_i} \left[\bar{F}(U_{i+\frac{1}{2}}^-, U_{i+\frac{1}{2}}^+) - \bar{F}(U_{i-\frac{1}{2}}^-, U_{i-\frac{1}{2}}^+) \right]$
- $U_{i-\frac{1}{2}}^+$ et $U_{i+\frac{1}{2}}^-$ sont les valeurs d'ordre élevé dans ω_i aux points $x_{i-\frac{1}{2}}$ et $x_{i+\frac{1}{2}}$

Formulation mobile ou totale

- $\rho \frac{dU}{dt} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$ ou $\rho^0 \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial X} = 0$

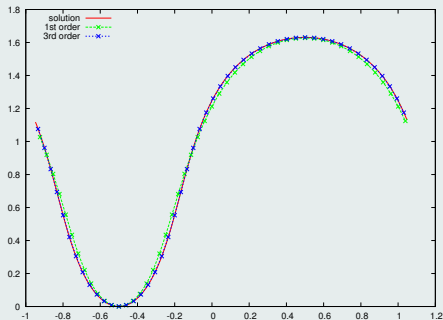
Approximation polynomiale par morceaux

- $U_{h,i}^n(x)$ l'approximation polynomiale de la solution sur ω_i^n
- $U_{h,i}^n(X)$ l'approximation polynomiale de la solution sur ω_i^0
- $U_{i\pm\frac{1}{2}}^\mp = U_{h,i}^n(x_{i\pm\frac{1}{2}})$ (config. mobile) ou $U_{i\pm\frac{1}{2}}^\mp = U_{h,i}^n(X_{i\pm\frac{1}{2}})$ (config. fixe)

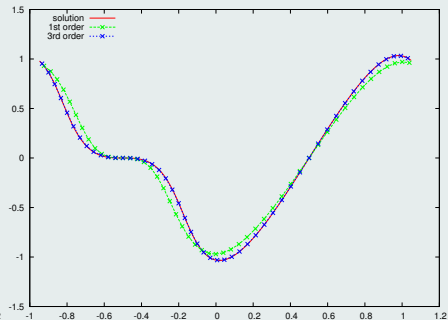
- 1 Introduction
- 2 Système d'équations de la dynamique des gaz en 1D
- 3 Schéma numérique d'ordre 1 en 1D
- 4 Extension à l'ordre élevé en 1D
- 5 Résultats numériques en 1D**
- 6 Système d'équations de la dynamique des gaz en 2D
- 7 Schéma numérique d'ordre 1 en 2D
- 8 Extension à l'ordre élevé en 2D
- 9 Résultats numériques en 2D

Solution initiale sur $X \in [0, 1]$

- $\rho^0(X) = 1 + 0.9999995 \sin(2\pi X)$, $u^0(X) = 0$, $p^0(X) = \rho^0(X)^\gamma$
- Conditions aux bords périodiques



(a) Profils de densité



(b) Profils de vitesse

Figure: Solutions sur 50 mailles à $t = 0.1$ pour un problème entropique régulier

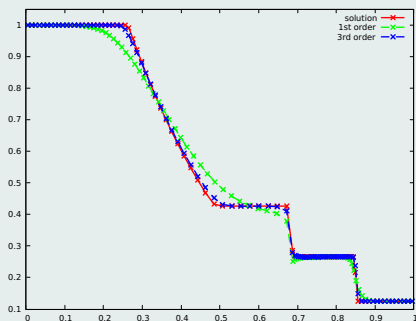
Taux de convergence

	L_1		L_2		L_∞	
h	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$	$E_{L_\infty}^h$	$q_{L_\infty}^h$
$\frac{1}{50}$	9.69E-5	3.02	9.31E-5	3.01	2.75E-4	3.01
$\frac{1}{100}$	1.19E-5	3.01	1.16E-5	3.00	3.40E-5	3.01
$\frac{1}{200}$	1.48E-6	3.00	1.44E-6	3.00	4.923E-6	3.00
$\frac{1}{400}$	1.85E-7	3.00	1.80E-7	3.00	5.26E-7	3.00
$\frac{1}{800}$	2.30E-8	-	2.25E-8	-	6.56E-8	-

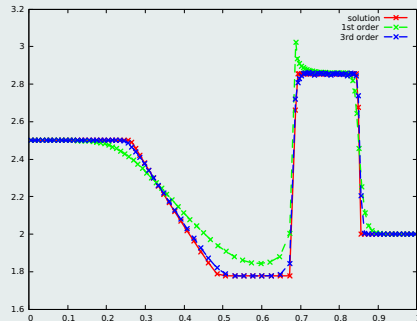
Table: Taux de convergence sur la pression avec un schéma DG d'ordre 3

Solution initiale sur $X \in [0, 1]$

$$\bullet (\rho^0, u^0, p^0) = \begin{cases} (1, 0, 1), & 0 < X < 0.5, \\ (0.125, 0, 0.1), & 0.5 < X < 1. \end{cases}$$



(a) Profils de densité

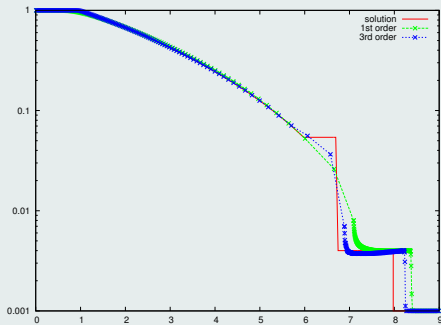


(b) Profils d'énergie interne

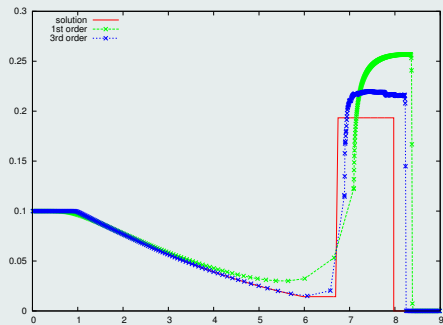
Figure: Solutions sur 100 mailles à $t = 0.2$ pour un tube à choc de Sod

Solution initiale sur $X \in [0, 9]$

$$\bullet (\rho^0, u^0, e^0) = \begin{cases} (1, 0, 0.1), & 0 < X < 3, \\ (0.001, 0, 10^{-7}), & 3 < X < 9. \end{cases}$$



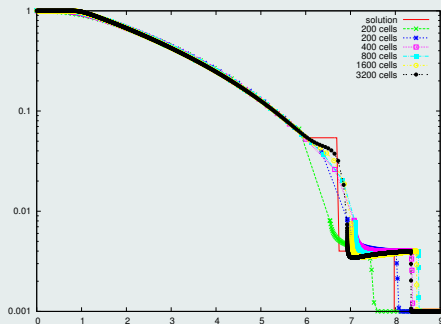
(a) Profils de densité



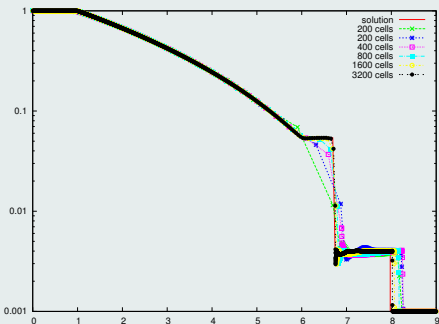
(b) Profils d'énergie interne

Figure: Solutions sur 400 mailles à $t = 6$ pour le tube à choc de Leblanc

Convergence



(a) Ordre 1

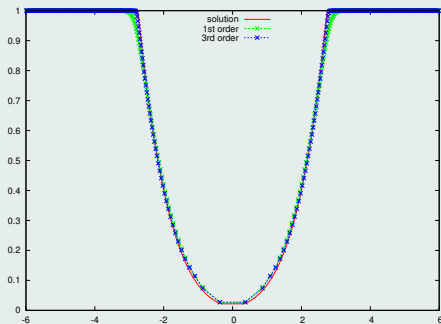


(b) Ordre 3

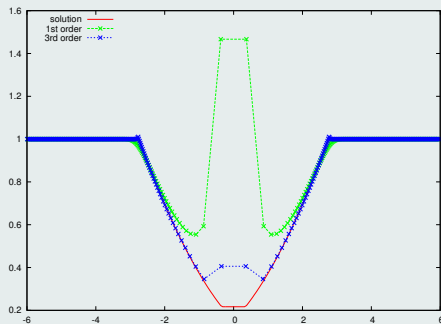
Figure: Convergence à $t = 6$ pour le tube à choc de Leblanc

Solution initiale sur $X \in [-4, 4]$

$$\bullet (\rho^0, u^0, p^0) = \begin{cases} (1, -2, 0.4), & -4 < X < 0, \\ (1, 2, 0.4), & 0 < X < 4. \end{cases}$$



(a) Profils de densité

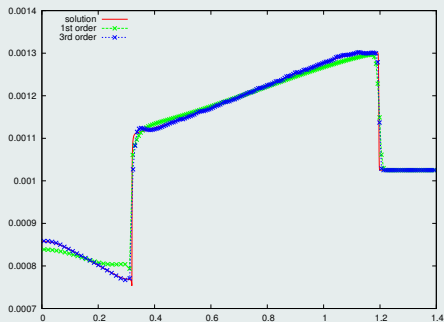


(b) Profils d'énergie interne

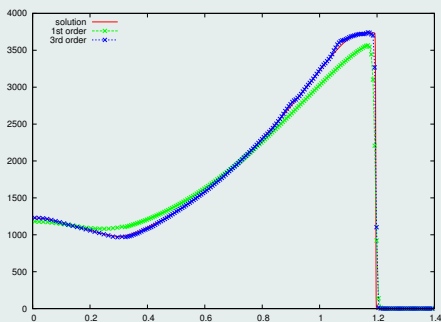
Figure: Solutions sur 400 mailles à $t = 1$ pour le problème 123

Solution initiale sur $X \in [0, 1.4]$

- $(\rho^0, u^0, p^0) = \begin{cases} (1.63 \times 10^{-3}, 0, 8.381 \times 10^3), & 0 < X < 0.16, \\ (1.025 \times 10^{-3}, 0, 1), & 0.16 < X < 3.0. \end{cases}$
- Sur $[0, 0.3]$, gaz issus de l'explosion (JWL EOS)
- Sur $[0.3, 1.4]$, eau (EOS des gaz raides)



(a) Profils de densité

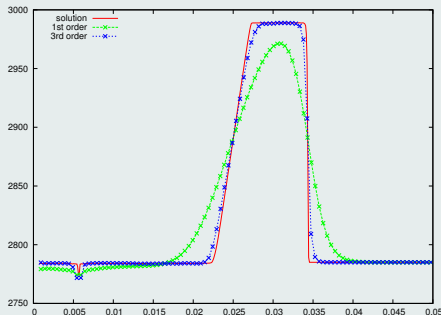


(b) Profils de pression

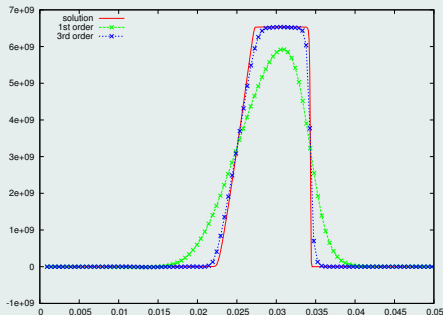
Figure: Solutions sur 400 mailles à $t = 0.00025$ pour une d'explosion sous-marine

Solution initiale sur $X \in [0, 0.05]$

- $\rho^0(X) = 2785$, $p^0(X) = 10^{-6}$, $u^0(X) = \begin{cases} 800, & 0 < X < 0.005, \\ 0, & 0.005 < X < 0.05. \end{cases}$
- Aluminium (Mie-Grüneisen EOS)



(a) Profils de densité



(b) Profils de pression

Figure: Solutions sur 100 mailles à $t = 5 \times 10^{-6}$ pour l'impact de plaques d'aluminium

- 1 Introduction
- 2 Système d'équations de la dynamique des gaz en 1D
- 3 Schéma numérique d'ordre 1 en 1D
- 4 Extension à l'ordre élevé en 1D
- 5 Résultats numériques en 1D
- 6 Système d'équations de la dynamique des gaz en 2D**
- 7 Schéma numérique d'ordre 1 en 2D
- 8 Extension à l'ordre élevé en 2D
- 9 Résultats numériques en 2D

Équations d'euler

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \rho \mathbf{u} = 0$
- $\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}_d) = \mathbf{0}$
- $\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u} e + p \mathbf{u}) = 0$

Équation des trajectoires

- $\frac{d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t), \quad \mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$

Dérivée matérielle

- $\frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t)$

Définitions

- $\mathbf{U} = (\tau, \mathbf{u}, e)^t$
- $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (-\mathbf{u}, \mathbb{1}(1)\rho, \mathbb{1}(2)\rho, \rho\mathbf{u})^t$ où $\mathbb{1}(i) = (\delta_{i1}, \delta_{i2})^t$

Formulation lagrangienne mobile

- $\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0$ Configuration mobile

Tenseur gradient de déformation

- $\mathbf{J} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x}$ avec $|\mathbf{J}| = \det \mathbf{J} > 0$
- $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (|\mathbf{J}| \mathbf{J}^{-t}) = \mathbf{0}$ Condition de Piola

Conservation de masse

- $\rho |\mathbf{J}| = \rho^0$

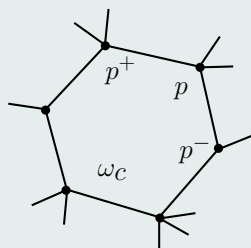
Formulation lagrangienne totale

- $\rho^0 \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (|\mathbf{J}| \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{U})) = 0$ Configuration fixe

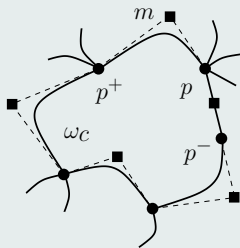
- 1 Introduction
- 2 Système d'équations de la dynamique des gaz en 1D
- 3 Schéma numérique d'ordre 1 en 1D
- 4 Extension à l'ordre élevé en 1D
- 5 Résultats numériques en 1D
- 6 Système d'équations de la dynamique des gaz en 2D
- 7 Schéma numérique d'ordre 1 en 2D**
- 8 Extension à l'ordre élevé en 2D
- 9 Résultats numériques en 2D

Définitions

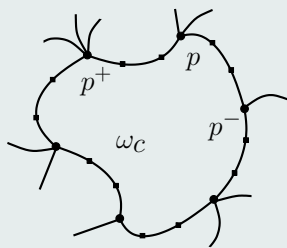
- $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ est une partition du domaine temporel $[0, T]$
- $\omega^0 = \bigcup_{c=1,l} \omega_c^0$ est une partition de domaine initial ω^0
- ω_c^n est l'image de ω_c^0 au temps t^n à travers l'écoulement
- m_c est la masse, constante, de la maille ω_c
- $U_c^n = (\tau_c^n, u_c^n, e_c^n)^t$ est la solution discrète



(a) Bords droits



(b) Coniques



(c) Polynômes

Figure: Mailles polygonales génériques

Intégration

- $$U_c^{n+1} = U_c^n - \frac{\Delta t^n}{m_c} \int_{\partial\omega_c} \bar{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$
- Intégration du terme de bord (analytique, quadrature, ...)

Schéma volumes finis générique d'ordre 1

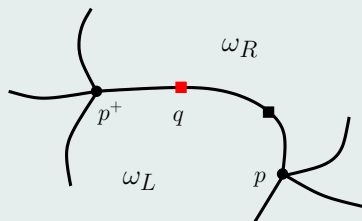
- $$U_c^{n+1} = U_c^n - \frac{\Delta t^n}{m_c} \sum_{q \in \mathcal{Q}_c} \bar{F}_{qc} \cdot l_{qc} \mathbf{n}_{qc}$$
- $\bar{F}_{qc} = (-\bar{\mathbf{u}}_q, \mathbb{1}(1)\bar{p}_{qc}, \mathbb{1}(2)\bar{p}_{qc}, \bar{p}_{qc} \bar{\mathbf{u}}_q)^t$ flux numérique au point q
- $\mathbf{x}_q^{n+1} = \mathbf{x}_q^n + \Delta t^n \bar{\mathbf{u}}_q$

Définitions

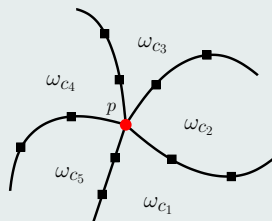
- \mathcal{Q}_c l'ensemble des points de contrôle de la maille ω_c
- $l_{qc} \mathbf{n}_{qc}$ normales au temps t^n à définir

Remarque

- \bar{F}_{qc} est local à la maille ω_c
- Seul $\bar{\mathbf{u}}_{qc} = \bar{\mathbf{u}}_q$ est continu, afin de bouger le maillage
- Perte du caractère conservatif du schéma?



(a) Point sur une face



(b) Noeud de la grille

Figure: Mailles voisines aux points de contrôle

Flux numérique 1D

- $\bar{p}_{qc} = p_c^n - \tilde{z}_{qc} (\bar{\mathbf{u}}_q - \mathbf{u}_c^n) \cdot \mathbf{n}_{qc}$
- $\tilde{z}_{qc} > 0$ approximation locale de l'impédance acoustique

Conservation

- $\sum_c m_c U_c^{n+1} = \sum_c m_c U_c^n + \text{BC} \quad ?$
- Pour simplifier, on considère que $\text{BC} = 0$
- Condition nécessaire : $\sum_c \sum_{q \in Q_c} \bar{\rho}_{qc} l_{qc} \mathbf{n}_{qc} = \mathbf{0}$

Exemple solveur : schémas LCDDG

- Conditions suffisantes
- $\forall p \in \mathcal{P}(\omega), \quad \sum_{c \in C_p} [\bar{\rho}_{pc}^- l_{pc}^- \mathbf{n}_{pc}^- + \bar{\rho}_{pc}^+ l_{pc}^+ \mathbf{n}_{pc}^+] = \mathbf{0}$
 $\implies \bar{\mathbf{u}}_p = \left(\sum_{c \in C_p} M_{pc} \right)^{-1} \sum_{c \in C_p} \left(M_{pc} \mathbf{u}_c^n + \rho_c^n l_{pc} \mathbf{n}_{pc} \right)$
- $\forall q \in \mathcal{Q}(\omega) \setminus \mathcal{P}(\omega), \quad (\bar{\rho}_{qL} - \bar{\rho}_{qR}) l_{qL} \mathbf{n}_{qL} = \mathbf{0} \iff \bar{\rho}_{qL} = \bar{\rho}_{qR}$
 $\implies \bar{\mathbf{u}}_q = \left(\frac{\tilde{Z}_{qL} \mathbf{u}_L^n + \tilde{Z}_{qR} \mathbf{u}_R^n}{\tilde{Z}_{qL} + \tilde{Z}_{qR}} \right) - \frac{\rho_R^n - \rho_L^n}{\tilde{Z}_{qL} + \tilde{Z}_{qR}} \mathbf{n}_{qf_{pp^+}}$

Combinaison convexe

- $$U_c^{n+1} = U_c^n - \frac{\Delta t^n}{m_c} \sum_{q \in Q_c} \bar{F}_{qc} \cdot l_{qc} \mathbf{n}_{qc} + \frac{\Delta t^n}{m_c} F(U_c^n) \cdot \underbrace{\sum_{q \in Q_c} l_{qc} \mathbf{n}_{qc}}_{=0}$$
- $$U_c^{n+1} = (1 - \lambda_c) U_c^n + \sum_{q \in Q_c} \lambda_{qc} \bar{U}_{qc}$$

Définitions

- $$\lambda_{qc} = \frac{\Delta t^n}{m_c} \tilde{z}_{qc} l_{qc} \quad \text{et} \quad \lambda_c = \sum_{q \in Q_c} \lambda_{qc}$$
- $$\bar{U}_{qc} = U_c^n - \frac{(\bar{F}_{qc} - F(U_c^n))}{\tilde{z}_{qc}} \cdot \mathbf{n}_{qc}$$

Condition CFL

- $$\Delta t^n \leq \frac{m_c}{\sum_{q \in Q_c} \tilde{z}_{qc} l_{qc}} \left(= \frac{|\omega_c^n|}{a_c^n \sum_{q \in Q_c} l_{qc}} \quad \text{si} \quad \tilde{z}_{qc} \equiv z_c^n = \rho_c^n a_c^n \right)$$

Schéma d'ordre 1 semi-discret en temps

- $$m_c \frac{dU_c}{dt} = - \sum_{q \in Q_c} \bar{F}_{qc} \cdot l_{qc} \mathbf{n}_{qc}$$

Relation de Gibbs

- $$T dS = d\varepsilon + p d\tau = de - \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} + p d\tau$$

Production entropique au niveau semi-discret

- $$m_c T_c \frac{dS_c}{dt} = m_c \frac{de_c}{dt} + \mathbf{u}_c \cdot m_c \frac{d\mathbf{u}_c}{dt} + p_c m_c \frac{d\tau_c}{dt}$$
- $$m_c T_c \frac{dS_c}{dt} = \sum_{q \in Q_c} \tilde{z}_{qc} l_{qc} [(\bar{\mathbf{u}}_q - \mathbf{u}_c) \cdot \mathbf{n}_{qc}]^2 \geq 0$$

- 1 Introduction
- 2 Système d'équations de la dynamique des gaz en 1D
- 3 Schéma numérique d'ordre 1 en 1D
- 4 Extension à l'ordre élevé en 1D
- 5 Résultats numériques en 1D
- 6 Système d'équations de la dynamique des gaz en 2D
- 7 Schéma numérique d'ordre 1 en 2D
- 8 Extension à l'ordre élevé en 2D**
- 9 Résultats numériques en 2D

Schéma sur les valeurs moyennes

- $$U_c^{n+1} = U_c^n - \frac{\Delta t^n}{m_c} \sum_{q \in Q_c} \bar{F}_{qc} \cdot l_{qc} \mathbf{n}_{qc}$$
- Dans \bar{F}_{qc} , les valeurs moyennes sont remplacées par les valeurs d'ordre élevé U_{qc} dans ω_c aux points q

Formulation mobile ou totale

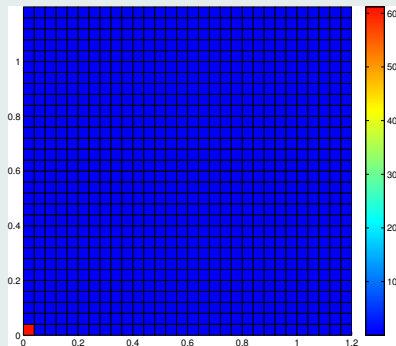
- $$\rho \frac{dU}{dt} + \nabla_x \cdot F(U) = 0 \quad \text{ou} \quad \rho^0 \frac{dU}{dt} + \nabla_x \cdot (|J|J^{-1}F(U)) = 0$$

Approximation polynomiale par morceaux

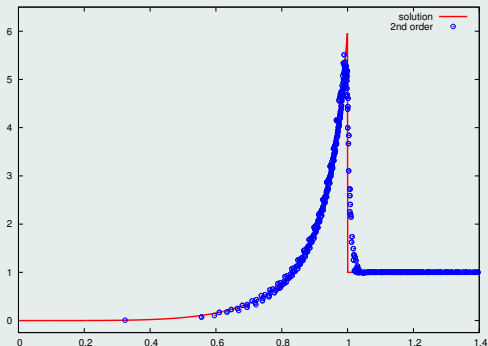
- $U_{h,c}^n(\mathbf{x})$ l'approximation polynomiale de la solution sur ω_c^n
- $U_{h,c}^n(\mathbf{X})$ l'approximation polynomiale de la solution sur ω_c^0
- $U_{qc} = U_{h,c}^n(\mathbf{x}_q)$ (config. mobile) ou $U_{qc} = U_{h,c}^n(\mathbf{X}_q)$ (config. fixe)

- 1 Introduction
- 2 Système d'équations de la dynamique des gaz en 1D
- 3 Schéma numérique d'ordre 1 en 1D
- 4 Extension à l'ordre élevé en 1D
- 5 Résultats numériques en 1D
- 6 Système d'équations de la dynamique des gaz en 2D
- 7 Schéma numérique d'ordre 1 en 2D
- 8 Extension à l'ordre élevé en 2D
- 9 Résultats numériques en 2D**

Détonation de Sedov



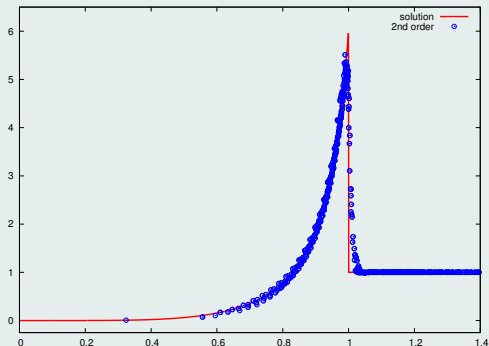
(a) Champ de pression - ordre 2



(b) Profils de densité

Figure : Champs de densité à $t = 1$ pour un problème de type Sedov sur un maillage cartésien 30×30

Détonation de Sedov

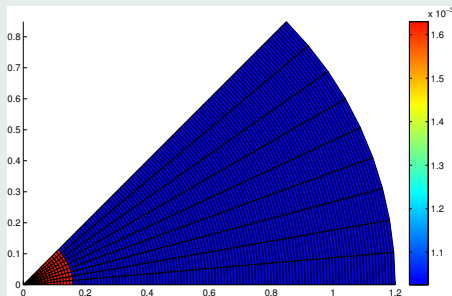


(a) Champ de pression - ordre 2

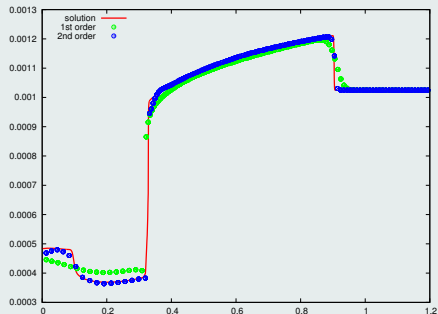
(b) Profils de densité

Figure : Champs de densité à $t = 1$ pour un problème de type Sedov sur un maillage cartésien 30×30

Explosion sous-marine d'une charge de TNT



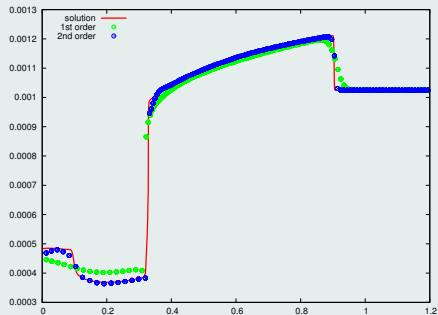
(c) Champ de densité - ordre 2



(d) Profils de densité

Figure : Solution d'ordre 2 à $t = 2.5 \times 10^{-4}$ pour un problème d'explosion sous-marine sur un maillage polaire 120×9

Explosion sous-marine d'une charge de TNT

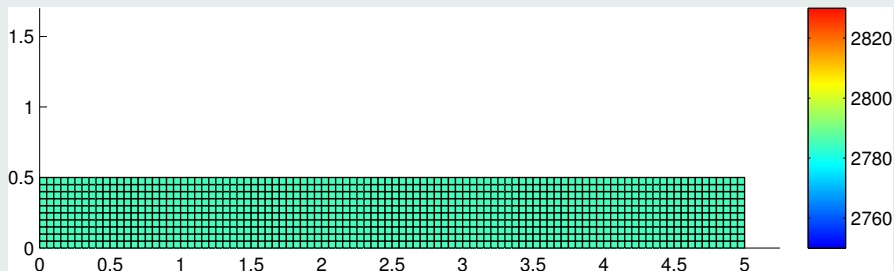


(c) Champ de densité - ordre 2

(d) Profils de densité

Figure : Solution d'ordre 2 à $t = 2.5 \times 10^{-4}$ pour un problème d'explosion sous-marine sur un maillage polaire 120×9

Impact d'une plaque d'aluminium



(e) Champ de densité

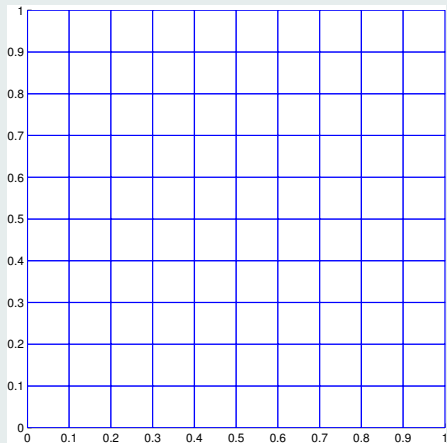
Figure : Solution d'ordre 2 à $t = 0.05$ pour un problème d'impact sur un maillage cartésien 100×10

Impact d'une plaque d'aluminium

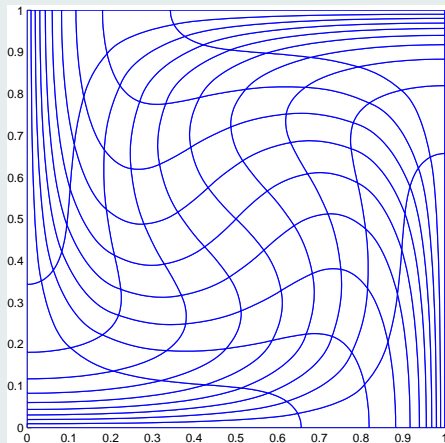
(e) Champ de densité

Figure : Solution d'ordre 2 à $t = 0.05$ pour un problème d'impact sur un maillage cartésien 100×10

Tourbillon de type Taylor-Green



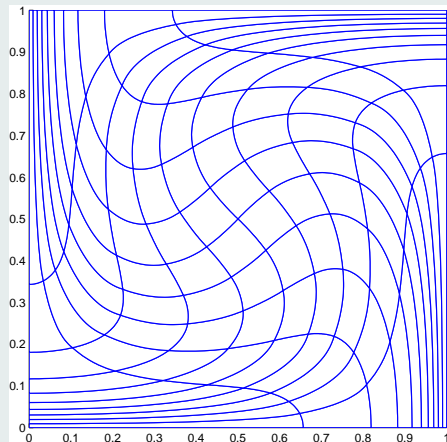
(f) Ordre 2



(g) Solution exacte

Figure : Grilles au temps final $t = 0.75$, sur un maillage cartésien 10×10

Tourbillon de type Taylor-Green



(f) Ordre 2

(g) Solution exacte

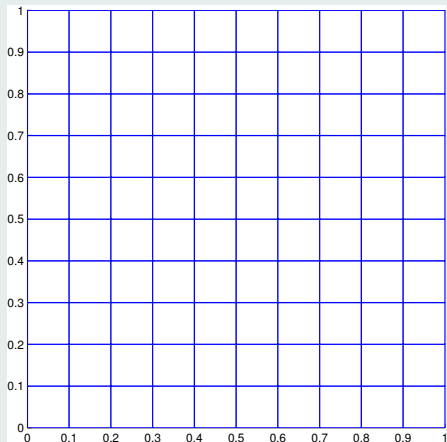
Figure : Grilles au temps final $t = 0.75$, sur un maillage cartésien 10×10

Taux de convergence

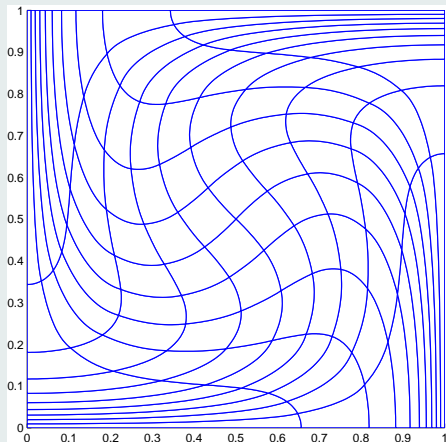
	L_1		L_2		L_∞	
h	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$	$E_{L_\infty}^h$	$q_{L_\infty}^h$
$\frac{1}{10}$	5.06E-3	1.94	6.16E-3	1.93	2.20E-2	1.84
$\frac{1}{20}$	1.32E-3	1.98	1.62E-3	1.97	5.91E-3	1.95
$\frac{1}{40}$	3.33E-4	1.99	4.12E-4	1.99	1.53E-3	1.98
$\frac{1}{80}$	8.35E-5	2.00	1.04E-4	2.00	3.86E-4	1.99
$\frac{1}{160}$	2.09E-5	-	2.60E-5	-	9.69E-5	-

Table: Taux de convergence sur la pression avec un schéma DG d'ordre 2

Tourbillon de type Taylor-Green



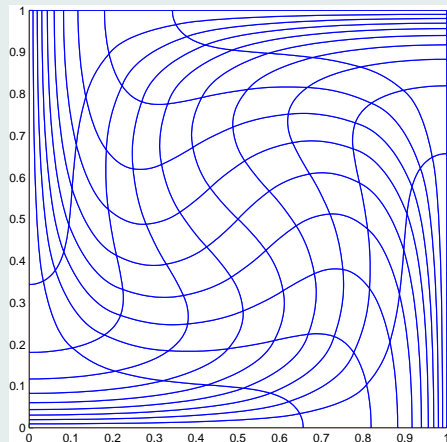
(h) Ordre 3



(i) Solution exacte

Figure : Grilles au temps final $t = 0.75$, sur un maillage cartésien 10×10

Tourbillon de type Taylor-Green



(h) Ordre 3

(i) Solution exacte

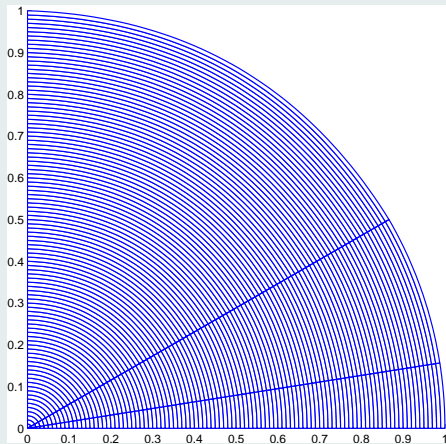
Figure : Grilles au temps final $t = 0.75$, sur un maillage cartésien 10×10

Taux de convergence

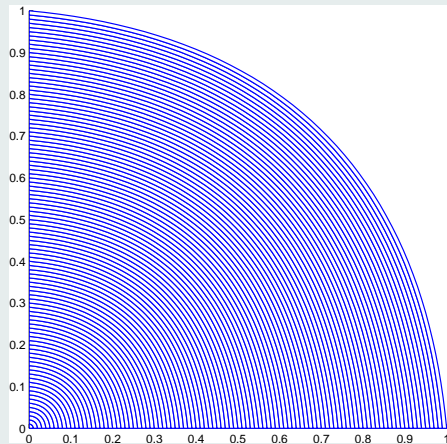
	L_1		L_2		L_∞	
h	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$	$E_{L_\infty}^h$	$q_{L_\infty}^h$
$\frac{1}{10}$	2.67E-4	2.96	3.36E-7	2.94	1.21E-3	2.86
$\frac{1}{20}$	3.43E-5	2.97	4.36E-5	2.96	1.66E-4	2.93
$\frac{1}{40}$	4.37E-6	2.99	5.59E-6	2.98	2.18E-5	2.96
$\frac{1}{80}$	5.50E-7	2.99	7.06E-7	2.99	2.80E-6	2.99
$\frac{1}{160}$	6.91E-8	-	8.87E-8	-	3.53E-7	-

Table: Taux de convergence sur la pression avec un schéma DG d'ordre3

Maillages polaires - préservation de la symétrie



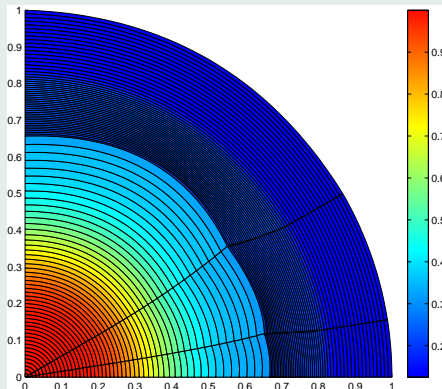
(j) 100×3



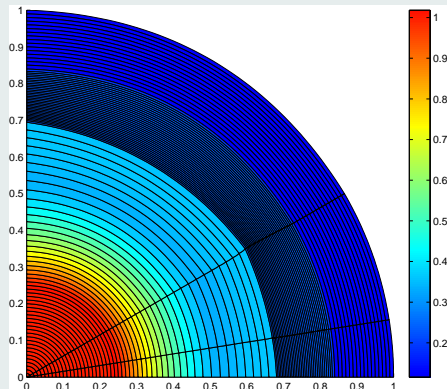
(k) 100×1

Figure : Grilles curvilignes définies en coordonnées polaires

Tube à choc de Sod - préservation de la symétrie



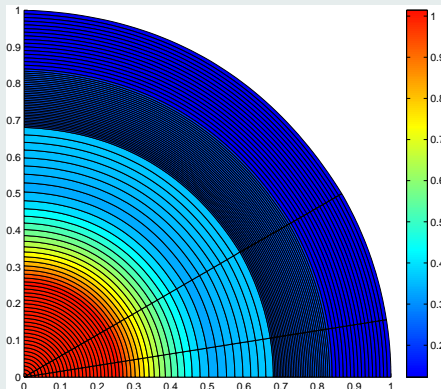
(l) Ordre 1



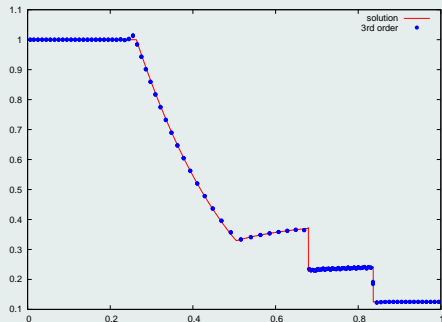
(m) Ordre 2

Figure : Champs densité pour l'ordre 1 et 2 sur maillages d'ordre 3

Tube à choc de Sod - préservation de la symétrie



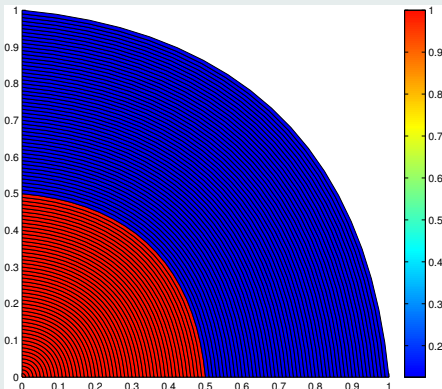
(n) Champ de densité



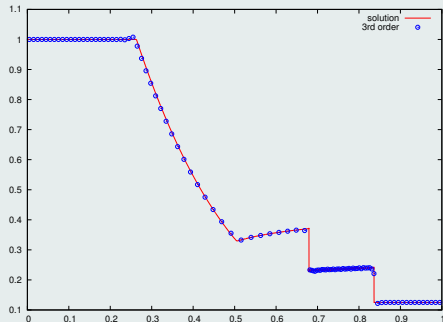
(o) Profils de densité

Figure : Solution d'ordre 3 pour un tube à choc de Sod polaire 100×3

Tube à choc de Sod - préservation de la symétrie



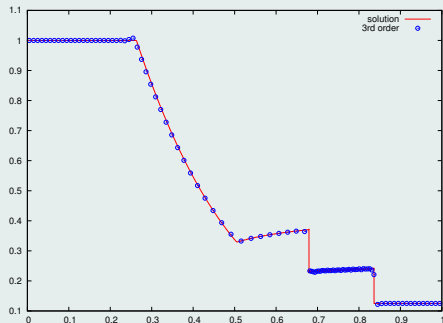
(p) Champ de densité



(q) Profils de densité

Figure : Solution d'ordre 3 pour un tube à choc de Sod polaire 100×3

Tube à choc de Sod - préservation de la symétrie

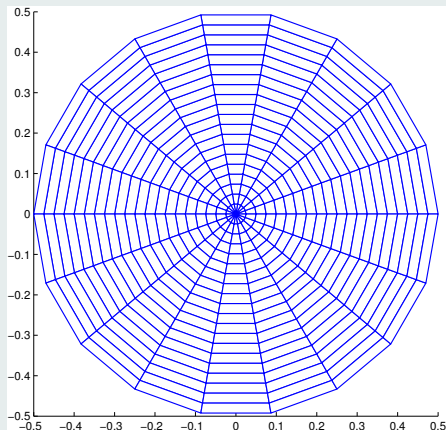


(p) Champ de densité

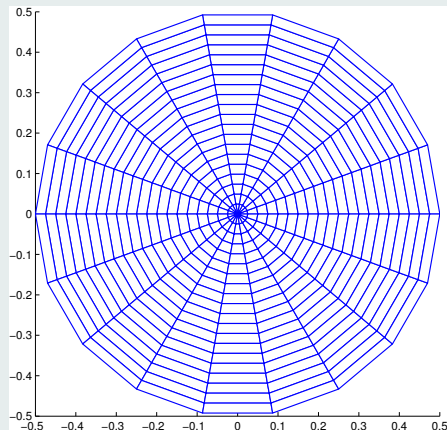
(q) Profils de densité

Figure : Solution d'ordre 3 pour un tube à choc de Sod polaire 100×3

Tourbillon de type Gresho



(r) Ordre 1



(s) Ordre 2

Figure : Grilles au temps final $t = 1$, sur un maillage polar 20×18

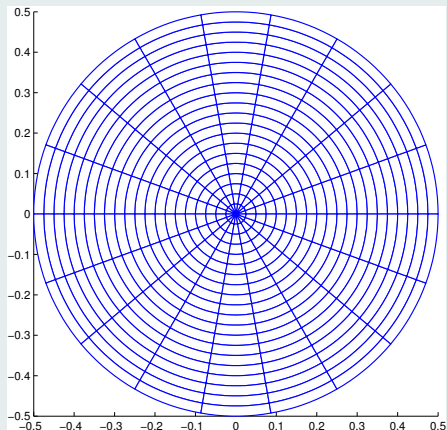
Tourbillon de type Gresho

(r) Ordre 1

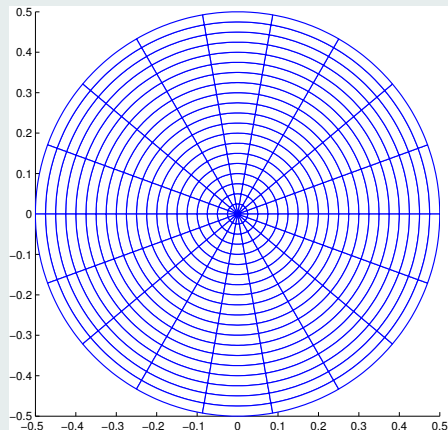
(s) Ordre 2

Figure : Grilles au temps final $t = 1$, sur un maillage polar 20×18

Tourbillon de type Gresho



(t) Ordre 3



(u) Solution exacte

Figure : Grilles au temps final $t = 1$, sur un maillage polar 20×18

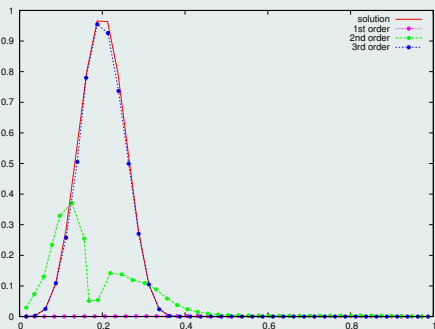
Tourbillon de type Gresho

(t) Ordre 3

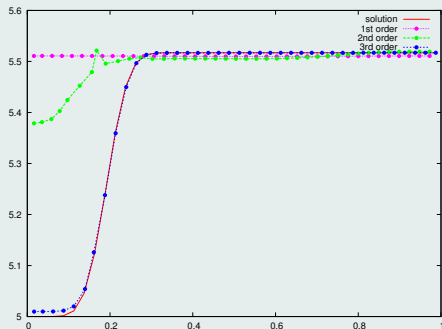
(u) Solution exacte

Figure : Grilles au temps final $t = 1$, sur un maillage polar 20×18

Tourbillon de type Gresho



(v) Profils de vitesse



(w) Profils de pression

Figure : Comparaison des profils de vitesse et pression au temps final $t = 1$, sur un maillage polar 20×18

Tourbillon de type Gresho

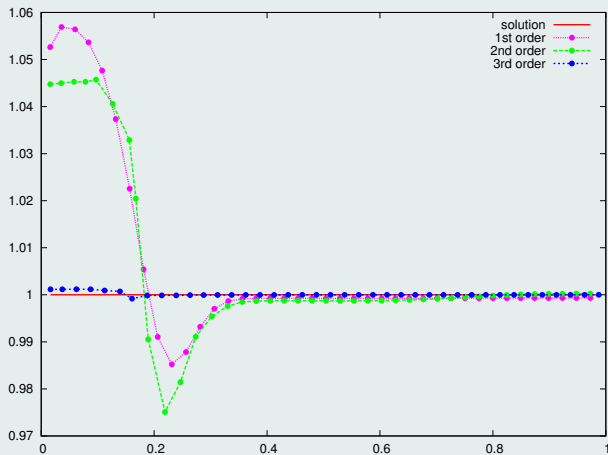
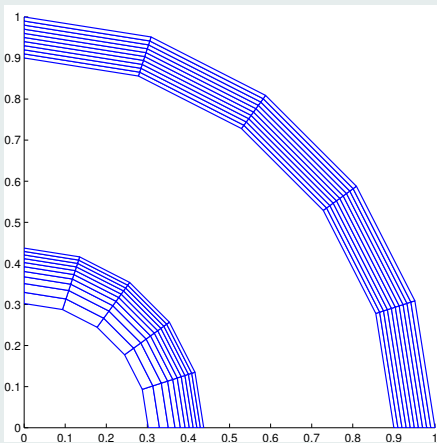
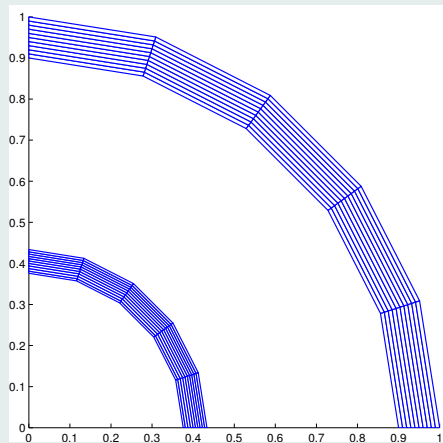


Figure : Comparaison des profils de densité au temps final $t = 1$, sur un maillage polar 20×18

Compression isentropique de Kidder



(x) Ordre 1



(y) Ordre 2

Figure : Grilles initiales et finales pour un problème de Kidder sur une grille polaire 10×5

Compression isentropique de Kidder

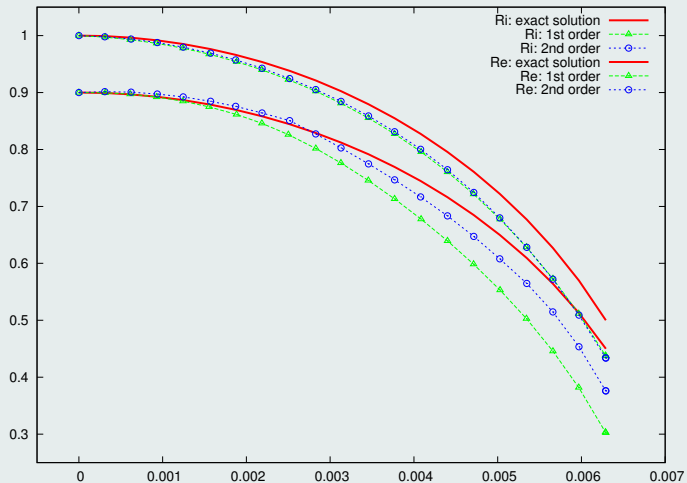
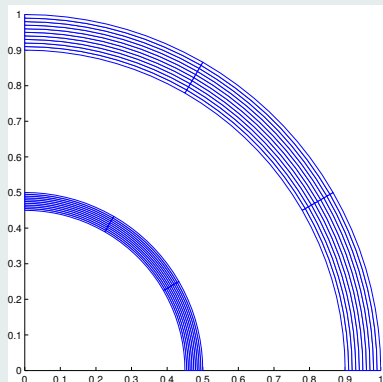
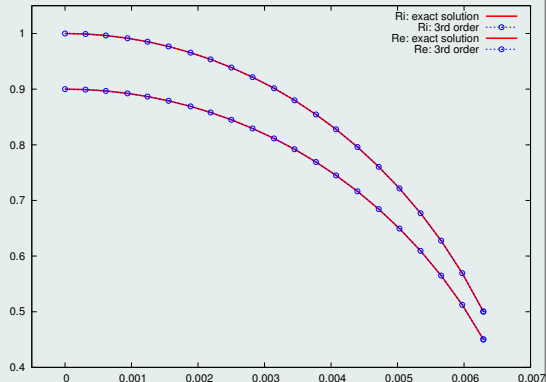


Figure : Évolution au cours du temps des rayons intérieur et extérieur pour un problème de Kidder sur une grille polaire 10×5

Compression isentropique de Kidder



(a) Grilles initiale et finale



(b) Évolution des rayons

Figure : Solution d'ordre 3 pour un problème de Kidder sur une grille polaire 10×3

Précision et temps de calcul pour un vortex de Taylor-Green

D.O.F	N	$E_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$E_{L_\infty}^h$	temps (sec)
600	24×25	2.67E-2	3.31E-2	8.55E-2	2.01
2400	48×50	1.36E-2	1.69E-2	4.37E-2	11.0






Table: Méthode d'ordre 1

D.O.F	N	$E_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$E_{L_\infty}^h$	temps (sec)
630	14×15	2.76E-3	3.33E-3	1.07E-2	2.77
2436	28×29	7.52E-4	9.02E-4	2.73E-3	11.3

Table: Méthode d'ordre 2

D.O.F	N	$E_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$E_{L_\infty}^h$	temps (sec)
600	10×10	2.67E-4	3.36E-4	1.21E-3	4.00
2400	20×20	3.43E-5	4.36E-5	1.66E-4	30.6

Table: Méthode d'ordre 3

-  F. VILAR, P.-H. MAIRE AND R. ABGRALL, *Cell-centered discontinuous Galerkin discretizations for two-dimensional scalar conservation laws on unstructured grids and for one-dimensional Lagrangian hydrodynamics*. CAF, 2010.
-  F. VILAR, *Cell-centered discontinuous Galerkin discretization for two-dimensional Lagrangian hydrodynamics*. CAF, 2012.
-  F. VILAR, P.-H. MAIRE AND R. ABGRALL, *A discontinuous Galerkin discretization for solving the two-dimensional gas dynamics equations written under total lagrangian formulation on general unstructured grids*. JCP, 2014.
-  F. VILAR, C.-W. SHU AND P.-H. MAIRE, *Positivity-preserving cell-centered Lagrangian schemes for multi-material compressible flows: Form first-order to high-orders. Part I: The 1D case*. JCP, 2016.
-  F. VILAR, C.-W. SHU AND P.-H. MAIRE, *Positivity-preserving cell-centered Lagrangian schemes for multi-material compressible flows: Form first-order to high-orders. Part II: The 2D case*. JCP, 2016.