

Chapitre 4

Schémas Volumes Finis appliqués aux Lois de Conservation Scalaires

François Vilar

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier



IMAG
INSTITUT MONTELLIERAIN
ALEXANDER GROTHENDIECK



- 1 Introduction
- 2 Principe de conservation
- 3 Schéma de Godunov
- 4 Solveur de Riemann approché
- 5 Propriétés et théorèmes
- 6 Stabilité non-linéaire et convergence
- 7 Résultats numériques
- 8 Extension multi-dimensionnelle
- 9 Ordre de convergence et conclusion

Forme intégrale

- Loi de Conservation Scalaire :

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \quad (\text{E})$$

où $u(x, t)$ est la solution et $f(u)$ la fonction flux

- Soit un volume de contrôle $I = [x_1, x_2]$ avec $\Delta x = x_2 - x_1$

$$\int_I (\text{E}) : \quad \frac{d}{dt} \int_I u(x, t) dx = - \left(f(u(x_2, t)) - f(u(x_1, t)) \right)$$

- Soit deux instants t_1 et t_2 avec $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_I (\text{E}) : \quad \int_I u(x, t_2) dx = \int_I u(x, t_1) dx - \left(\int_{t_1}^{t_2} f(u(x_2, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_1, t)) dt \right)$$

- Soit $\bar{u}_I(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_I u(x, t) dx$ et $\bar{f}_{[t_1, t_2]}(x) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} f(u(x, t)) dt$

$$\bar{u}_I(t_2) = \bar{u}_I(t_1) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{f}_{[t_1, t_2]}(x_2) - \bar{f}_{[t_1, t_2]}(x_1) \right)$$

Approximation constante par morceaux

- On partitionne le domaine d'étude $[a, b]$ en mailles $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$
- Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots t_N = T$ une partition du domaine temporel
- On introduit la solution approchée constante par morceaux $u_h(x, t)$

$$u_h(x, t) = u_i^n, \quad \text{si } x \in]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[\text{ et } t \in [t_n, t_{n+1}[$$

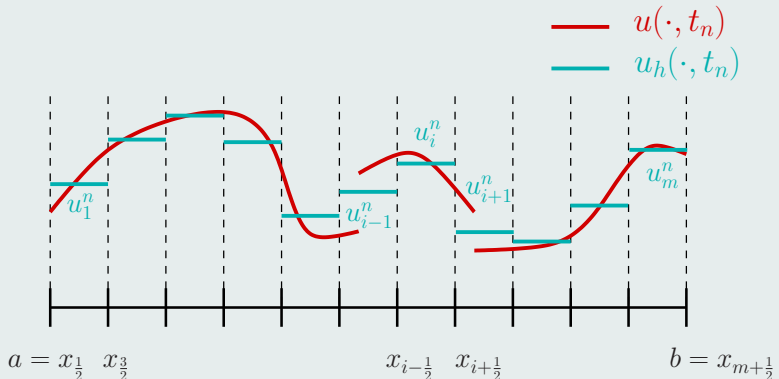


Schéma Volumes Finis (VF)

- Forme intégrale

$$\bar{u}_{C_i}(t_{n+1}) = \bar{u}_{C_i}(t_n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{f}_{[t_n, t_{n+1}]}(x_{i+\frac{1}{2}}) - \bar{f}_{[t_n, t_{n+1}]}(x_{i-\frac{1}{2}}) \right)$$

- Schéma numérique VF sur la maille C_i entre les instants t_n et t_{n+1}

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} \right)$$

- $u_i^n \simeq \bar{u}_{C_i}(t_n) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx$ solution approchée

- $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} \simeq \bar{f}_{[t_n, t_{n+1}]}(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt$ flux numérique

Remarque

- Le schéma VF est entièrement déterminé par la définition des flux numériques $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$

Respect de la conservation

- Considérons les conditions aux limites périodiques $u(a, t) = u(b, t)$
- La forme intégrale de l'EDP sur le domaine $[a, b] \times [t_n, t_{n+1}]$ s'écrit alors

$$\int_a^b u(x, t_{n+1}) dx = \int_a^b u(x, t_n) dx$$

- Sommons le schéma VF sur toutes les mailles avec $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{F}_{m+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \sum_1^m \Delta x u_i^{n+1} &= \sum_1^m \Delta x u_i^n - \sum_1^m \Delta t \left(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} \right), \\ &= \sum_1^m \Delta x u_i^n - \Delta t \left(\mathcal{F}_{m+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \right) = \sum_1^m \Delta x u_i^n \end{aligned}$$

- Le schéma est dît **conservatif**

Conservation : propriété fondamentale

- Principes physiques (conservation de la masse, de l'énergie, ...)
- Perte de conservation $\implies$ mauvaise localisation des discontinuités

Exemple de perte de conservation

$$\bullet \begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$

- Forme non-conservative : $\partial_t u + u \partial_x u = 0$
- Exemples d'approximations consistantes au sens des différences finis

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \tilde{u} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

$$\text{avec les cas suivants } \tilde{u} = \begin{cases} u_{i-1}^n & \text{cas 1} \\ u_i^n & \text{cas 2} \\ \frac{1}{2} (u_{i-1}^n + u_i^n) & \text{cas 3} \end{cases}$$

- Seul le cas 3 donne un schéma conservatif

$$\frac{1}{2} (u_{i-1}^n + u_i^n) (u_i^n - u_{i-1}^n) = \frac{1}{2} ((u_i^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2)$$

Exemple de perte de conservation

Retour au schéma VF

- $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}})$

Remarque

- $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u_h(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt$
- $u_h(\cdot, t)$ est discontinue aux points $x_{i+\frac{1}{2}}$
- Comment définir les flux numériques $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$?

Point de vue de S. Godunov [1959]

- À chaque pas temps, chaque interface sépare deux états constants
- On peut donc considérer à $x_{i+\frac{1}{2}}$ au temps t_n le problème de Riemann

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times [t_n, +\infty[, \\ u(x, t_n) = \begin{cases} u_i^n, & \text{si } x < x_{i+\frac{1}{2}}, \\ u_{i+1}^n, & \text{si } x > x_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases} \end{cases}$$

Schéma de Godunov

- $\mathcal{W}\left(\frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{t - t_n}; u_i^n, u_{i+1}^n\right)$ solution entropique du problème de Riemann
- Le schéma de Godunov s'écrit :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} \mathcal{W}\left(\frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta t}; u_{i-1}^n, u_i^n\right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathcal{W}\left(\frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; u_i^n, u_{i+1}^n\right) dx$$

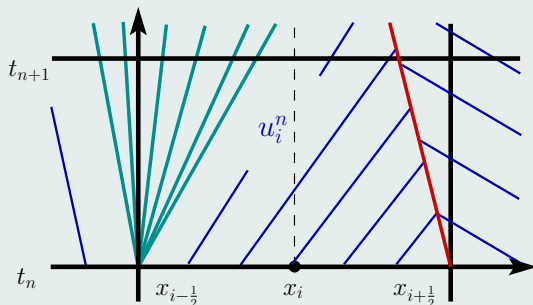


Schéma de Godunov

- Notons que $\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\mathcal{W}(0; u_i^n, u_{i+1}^n)) dt = f(\mathcal{W}(0; u_i^n, u_{i+1}^n))$
- On peut donc définir les flux numériques comme :

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = f(\mathcal{W}(0; u_i^n, u_{i+1}^n))$$

- Le schéma de Godunov se réécrit alors sous forme VF :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(\mathcal{W}(0; u_i^n, u_{i+1}^n)) - f(\mathcal{W}(0; u_{i-1}^n, u_i^n)) \right)$$

Condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)

- Pour que cette formulation reste correcte, les ondes issues des problèmes de Riemann aux interfaces ne doivent pas interagir
- Cette condition s'exprime comme une contrainte sur le pas de temps

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sup_u |a(u)|}$$

Remarques sur le schéma de Godunov

- + **Structure complète des problèmes de Riemann**
- + **Préserve le principe du maximum** (de positivité pour les systèmes)
- + **Schéma numérique entropique**
- **Coût très élevé** : résoudre analytiquement, à chaque pas de temps et chaque interface un problème de Riemann
- **Peu adapté aux systèmes** (exemple : pour Euler en 1D, 3 types d'ondes pour 16 configurations possibles par problème de Riemann)

⇒ **Solveur de Riemann approché**

Solveur de Riemann approché

- $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(u_i^n, u_{i+1}^n) - \mathcal{F}(u_{i-1}^n, u_i^n))$
- La fonction $(u^-, u^+) \rightarrow \mathcal{F}(u^-, u^+)$ est généralement le flux f appliqué à la solution d'un problème de Riemann simplifié (linéarisation de l'EDP, approximation dans la structure des ondes, ...)

Exemple de solveur de Riemann approché

- On peut ignorer la structure des différentes ondes, et tout mettre dans un éventail suffisamment large, ici avec $\gamma \geq \sup_{u \in I(u^-, u^+)} |a(u)|$

- On intègre $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ sur la 1ère moitié

$$\frac{\Delta x}{2} (u^* - u^-) + \Delta t (f^* - f(u^-)) = 0$$

- En notant que $\gamma \Delta t = \frac{\Delta x}{2}$, on obtient

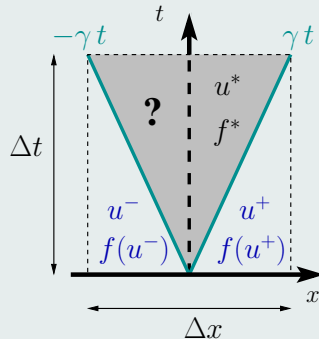
$$f^* = f(u^-) - \gamma (u^* - u^-)$$

- De la même manière, sur la 2ème moitié, on a

$$f^* = f(u^+) + \gamma (u^* - u^+)$$

- Le demi-somme de ces deux relations nous donne la définition de f^*

$$f^* = \frac{f(u^-) + f(u^+)}{2} - \frac{\gamma}{2} (u^+ - u^-)$$



Flux numérique sous forme visqueuse

$$\bullet \mathcal{F}(u^-, u^+) = \underbrace{\frac{f(u^-) + f(u^+)}{2}}_{\text{partie centrée}} - \underbrace{\frac{\gamma(u^-, u^+)}{2} (u^+ - u^-)}_{\text{partie dissipative}}$$

- Pour γ constant, la schéma VF se réécrit comme

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \underbrace{\left(\frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)}{2 \Delta x} \right)}_{\simeq \partial_x f(u)} + \frac{\gamma \Delta t \Delta x}{2} \underbrace{\left(\frac{u_{i+1}^n - 2 u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)}_{\simeq \partial_{xx} u}$$

Exemples

$$\bullet \gamma(u^-, u^+) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Lax-Friedrichs

$$\bullet \gamma(u^-, u^+) = \sup_u (|a(u)|)$$

Lax-Friedrichs global

$$\bullet \gamma(u^-, u^+) = \max (|a(u^-)|, |a(u^+)|)$$

LF local ou Rusanov

$$\bullet \gamma(u^-, u^+) = \begin{cases} \left| \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} \right| & \text{si } u^- \neq u^+ \\ |a(u^-)| & \text{si } u^- = u^+ \end{cases}$$

Murman-Roe

Réinterprétation : schéma de *type Godunov*

- Considérons le schéma VF suivant

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} \right),$$

- avec les flux numériques sont définis comme

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)}{2} - \frac{\gamma_{i+\frac{1}{2}}}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

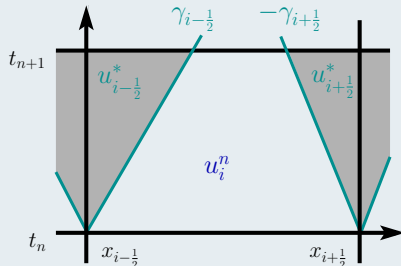
- En ajoutant et enlevant $\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_i^n (\gamma_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}) + f(u_i^n) \right)$, on obtient

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\gamma_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}) \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \gamma_{i-\frac{1}{2}} \underbrace{\left(u_i^n + \frac{\mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} - f(u_i^n)}{\gamma_{i-\frac{1}{2}}} \right)}_{u_{i-\frac{1}{2}}^*} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \gamma_{i+\frac{1}{2}} \underbrace{\left(u_i^n - \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - f(u_i^n)}{\gamma_{i+\frac{1}{2}}} \right)}_{u_{i+\frac{1}{2}}^*} \end{aligned}$$

Réinterprétation : schéma de *type Godunov*

- Le schéma volumes finis peut se réécrire alors

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\gamma_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}})\right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \gamma_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}^* + \frac{\Delta t}{\Delta x} \gamma_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}}^*$$



Remarque

- Sous la condition $\frac{\Delta t}{\Delta x} (\gamma_{i-\frac{1}{2}} + \gamma_{i+\frac{1}{2}}) \leq 1$, la solution u_i^{n+1} est une combinaison convexe des trois quantités u_i^n , $u_{i-\frac{1}{2}}^*$, $u_{i+\frac{1}{2}}^*$
- Sous cette condition (CFL), si $u_i^n, u_{i-\frac{1}{2}}^*, u_{i+\frac{1}{2}}^* \in G$ avec G un ensemble convexe d'admissibilité, alors $u_i^{n+1} \in G$

Flux numérique consistant

- Soit le schéma volumes finis sur la maille C_i suivant

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(u_i^n, u_{i+1}^n) - \mathcal{F}(u_{i-1}^n, u_i^n)) \quad (\text{VF})$$

- Le flux numérique est dit consistant ssi $\mathcal{F}(u, u) = f(u)$

Théorème de Lax-Wendroff

- On considère une suite de maillage uniforme $(\Delta x_q)_{q \in \mathbb{N}}$ et $(\Delta t_q)_{q \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ tel que $\lim_{q \rightarrow \infty} \Delta x_q = \lim_{q \rightarrow \infty} \Delta t_q = 0$
- On utilise un schéma volumes finis (VF) consistant, pour obtenir une suite de solutions numériques constantes par morceaux $(u_{h,q}(x, t))_{q \in \mathbb{N}}$
- On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que $\|u_{h,q}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} \leq K, \forall q \in \mathbb{N}$
- On suppose qu'il existe une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ tel que $\lim_{q \rightarrow \infty} u_{h,q}(x, t) = u(x, t)$ presque partout dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- On suppose que $\mathcal{F}$ est lipschitzienne sur $[-K, K]^2$
- **Alors u est une solution faible de (C)**

Remarque

- Ce théorème ne dit rien sur l'éventuelle **convergence** ou **stabilité**

Définition : schéma entropique

Un schéma VF est dit consistant avec l'inégalité d'entropie ssi

- $\forall (\eta, \psi)$ couple entropie-flux, $\exists \bar{\psi} : \mathbb{R}^2 \leftarrow \mathbb{R}$ appelé flux numérique d'entropie vérifiant la propriété $\bar{\psi}(u, u) = \psi(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}$
- $\forall i \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\eta(u_i^{n+1}) \leq \eta(u_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{\psi}(u_i^n, u_{i+1}^n) - \bar{\psi}(u_{i-1}^n, u_i^n))$$

Théorème

- Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent
- On suppose que le schéma est entropique, et que $\forall$ entropie η , le flux numérique d'entropie associé $\bar{\psi}$ est lipschitzien sur $[-K, K]^2$
- **Alors u est l'unique solution faible entropique du problème (C)**

Exemples de schémas entropiques

- Le schéma de Godunov est entropique
- Tous les schémas volumes finis caractérisés par un flux numérique

$$\mathcal{F}(u^-, u^+) = \frac{f(u^-) + f(u^+)}{2} - \frac{\gamma(u^-, u^+)}{2} (u^+ - u^-),$$

sont entropiques, sous la condition que $\forall (u^-, u^+) \in \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(u^-, u^+) \geq \sup_{u \in I(u^-, u^+)} |a(u)|$$

where $I(u^-, u^+) = [\min(u^-, u^+), \max(u^-, u^+)]$

Stabilité non-linéaire et convergence

- Que dire de la convergence de la solution numérique ?
- Quel critère de stabilité dans le cas non-linéaire ?
- Comment parler de convergence lorsqu'il n'y a pas unicité des solutions faibles ?

Définitions

- Soit $\mathbb{W}$ l'ensemble de solutions faibles du problème de Cauchy (C)
- On introduit, pour un temps maximal T , la norme $\|\cdot\|_{1,T}$ suivante

$$\|v\|_{1,T} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |v(x,t)| \, dx \, dt$$

- Soit une séquence d'approximation numérique $(u_{h,q})_{q \in \mathbb{N}}$
- On définit l'erreur globale comme la distance à l'espace $\mathbb{W}$

$$\text{dist}(u_{h,q}, \mathbb{W}) = \inf_{w \in \mathbb{W}} \|u_{h,q} - w\|_{1,T}$$

- Le schéma sera dit convergent si $\text{dist}(u_{h,q}, \mathbb{W}) \rightarrow 0$ quand $q \rightarrow \infty$

Variation totale

- On appelle variation totale d'une fonction $v \in L^1(\mathbb{R})$, la quantité

$$TV(v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |v(x+\epsilon) - v(x)| \, dx \right)$$

Remarque

- Dans le cas d'une fonction $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ constante par morceaux, telle que $\forall i \in \mathbb{Z}, v(x)|_{C_i} = v_i$, la variation totale peut alors s'écrire

$$TV(v) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |v_{i+1} - v_i|$$

TV-stabilité

- On considère la problème de Cauchy (C) avec $u_0(\cdot)$ une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux à support compact
- On considère un schéma volumes finis du type (VF) avec $\mathcal{F}(\cdot, \cdot)$ un flux numérique consistant et lipschitzien par rapport à ses deux arguments
- Le schéma sera dit **TV-stable** sur $[0, T]$ ssi $\Delta t_0 > 0$ and $K > 0$ tel que

$$TV(u_h(\cdot, n\Delta t)) \leq K,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \Delta t \leq \Delta t_0 \text{ avec } n\Delta t \leq T$$

Théorème : convergence

- Sous les hypothèses précédentes, si le schéma est TV -stable sur $[0, T]$
- Alors la séquence d'approximation numérique converge

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \text{dist}(u_{h,q}, \mathbb{W}) \longrightarrow 0$$

Remarque

- Si, de plus, le schéma est entropique, la solution numérique converge vers l'unique solution faible entropique

Méthode à variation totale décroissante (TVD)

- Un moyen plus simple de s'assurer de la TV -stabilité d'un schéma est de regarder s'il est à variation totale décroissante (TVD), c'est à dire

$$TV(u_h(\cdot, t_{n+1})) \leq TV(u_h(\cdot, t_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque

- Cela implique que $\forall n \in \mathbb{N}, TV(u_h(\cdot, t_n)) \leq TV(u_h(\cdot, 0))$
- Le schéma est TV -stable car u_0 est à support compact

Proposition

- Soit un schéma volumes finis défini par un flux numérique de la forme

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)}{2} - \frac{\gamma_{i+\frac{1}{2}}}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

- Ce schéma sera TVD si

$$\left| \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right| \leq \gamma_{i+\frac{1}{2}} \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Preuve

- Par soucis de concision, posons $\lambda_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \gamma_{i\pm\frac{1}{2}}$
- On va réutiliser le schéma écrit sous forme de combinaison convexe

$$u_i^{n+1} = u_i^n (1 - \lambda_{i-\frac{1}{2}} - \lambda_{i+\frac{1}{2}}) + \lambda_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}^* + \lambda_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}}^*$$

- $u_{i\pm\frac{1}{2}}^* = u_i^n \mp \frac{\mathcal{F}_{i\pm\frac{1}{2}} - f(u_i^n)}{\gamma_{i\pm\frac{1}{2}}} = \frac{u_i^n + u_{i\pm 1}^n}{2} \mp \frac{1}{2\gamma_{i\pm\frac{1}{2}}} (f(u_{i\pm 1}^n) - f(u_i^n))$

Preuve

- $$u_{i\pm\frac{1}{2}}^* = \frac{u_i^n + u_{i\pm 1}^n}{2} \mp \underbrace{\frac{1}{\gamma_{i\pm\frac{1}{2}}} \left(\frac{f(u_{i\pm 1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i\pm 1}^n - u_i^n} \right)}_{C_{i\pm\frac{1}{2}}} \frac{(u_{i\pm 1}^n - u_i^n)}{2}$$
- $$u_{i\pm\frac{1}{2}}^* - u_i^n = \frac{1}{2} \left(1 \mp C_{i\pm\frac{1}{2}} \right) (u_{i\pm 1}^n - u_i^n)$$
- $$\begin{aligned} u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} &= (1 - \lambda_{i+\frac{1}{2}}) (u_{i+1}^n - u_i^n) \\ &\quad + \lambda_{i+\frac{3}{2}} \left(u_{i+\frac{3}{2}}^* - u_{i+1}^n \right) - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \left(u_{i-\frac{1}{2}}^* - u_i^n \right) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} &= (1 - \lambda_{i+\frac{1}{2}}) (u_{i+1}^n - u_i^n) \\ &\quad + \frac{\lambda_{i+\frac{3}{2}}}{2} \left(1 - C_{i+\frac{3}{2}} \right) (u_{i+2}^n - u_{i+1}^n) + \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{2} \left(1 + C_{i-\frac{1}{2}} \right) (u_i^n - u_{i-1}^n) \end{aligned}$$
- Afin de s'assurer que $\forall i \in \mathbb{Z}, |C_{i+\frac{1}{2}}| \leq 1$, on fait l'hypothèse suivante

$$-1 \leq \frac{1}{\gamma_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right) \leq 1$$

Preuve

- On considère également que $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_{i+\frac{1}{2}} \leq 1 \iff \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\gamma_{i+\frac{1}{2}}}$
- $$|u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq (1 - \lambda_{i+\frac{1}{2}}) |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

$$+ \frac{\lambda_{i+\frac{3}{2}}}{2} \left(1 - C_{i+\frac{3}{2}}\right) |u_{i+2}^n - u_{i+1}^n| + \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{2} \left(1 + C_{i-\frac{1}{2}}\right) |u_i^n - u_{i-1}^n|$$
- $$\sum_{i=-i_0}^{i_0} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i=-i_0}^{i_0} (1 - \lambda_{i+\frac{1}{2}}) |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

$$+ \sum_{i=-i_0}^{i_0} \frac{\lambda_{i+\frac{3}{2}}}{2} \left(1 - C_{i+\frac{3}{2}}\right) |u_{i+2}^n - u_{i+1}^n| + \sum_{i=-i_0}^{i_0} \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{2} \left(1 + C_{i-\frac{1}{2}}\right) |u_i^n - u_{i-1}^n|$$
- Après changement d'indices, on obtient

$$\sum_{i=-i_0}^{i_0} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i=-i_0}^{i_0} (1 - \lambda_{i+\frac{1}{2}}) |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

$$+ \sum_{i=-i_0+1}^{i_0+1} \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{2} \left(1 - C_{i+\frac{1}{2}}\right) |u_{i+1}^n - u_i^n| + \sum_{i=-i_0-1}^{i_0-1} \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}}{2} \left(1 + C_{i+\frac{1}{2}}\right) |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

Preuve

- $$\sum_{i=-i_0}^{i_0} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i=-i_0}^{i_0} |u_{i+1}^n - u_i^n| + \frac{\lambda_{i_0+\frac{3}{2}}}{2} \left(1 - C_{i_0+\frac{3}{2}}\right) |u_{i_0+2}^n - u_{i_0+1}^n|$$

$$- \frac{\lambda_{-i_0+\frac{1}{2}}}{2} \left(1 - C_{-i_0+\frac{1}{2}}\right) |u_{-i_0+1}^n - u_{-i_0}^n| + \frac{\lambda_{-i_0-\frac{1}{2}}}{2} \left(1 + C_{-i_0-\frac{1}{2}}\right) |u_{-i_0}^n - u_{-i_0-1}^n|$$

$$- \frac{\lambda_{i_0+\frac{1}{2}}}{2} \left(1 + C_{i_0+\frac{1}{2}}\right) |u_{i_0}^n - u_{i_0-1}^n|$$
- Sous l'hypothèse d'une donnée initiale à support compact, on a que :

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} u_i^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Par conséquent, en prenant la limite quand $i_0 \rightarrow +\infty$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

Proposition

- Soit un schéma volumes finis défini par un flux numérique de la forme

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)}{2} - \frac{\gamma_{i+\frac{1}{2}}}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

- Ce schéma assurera un PMD, et sera donc L_∞ stable, si

$$\left| \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right| \leq \gamma_{i+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Preuve

- On va réutiliser le schéma écrit sous forme de type Godunov

$$u_i^{n+1} = u_i^n (1 - \lambda_{i-\frac{1}{2}} - \lambda_{i+\frac{1}{2}}) + \lambda_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}^* + \lambda_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}}^*$$

avec $u_{i\pm\frac{1}{2}}^*$ les états intermédiaires des solveurs de Riemann

- u_i^{n+1} s'exprime comme une combinaison convexe de u_i^n , $u_{i-\frac{1}{2}}^*$ et $u_{i+\frac{1}{2}}^*$ si

$$1 - \lambda_{i-\frac{1}{2}} - \lambda_{i+\frac{1}{2}} \geq 0$$

Preuve

$$\bullet \quad u_{i\pm\frac{1}{2}}^* = \frac{u_i^n + u_{i\pm 1}^n}{2} \mp \frac{1}{2\gamma_{i\pm\frac{1}{2}}} \left(\frac{f(u_{i\pm 1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i\pm 1}^n - u_i^n} \right) (u_{i\pm 1}^n - u_i^n)$$

$$\bullet \quad u_{i\pm\frac{1}{2}}^* = u_i^n \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\gamma_{i\pm\frac{1}{2}}} \frac{f(u_{i\pm 1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i\pm 1}^n - u_i^n} \right) \\ + u_{i\pm 1}^n \left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\gamma_{i\pm\frac{1}{2}}} \frac{f(u_{i\pm 1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i\pm 1}^n - u_i^n} \right)$$

- On voit donc que $u_{i\pm\frac{1}{2}}^*$ est une combinaison convexe de u_i^n et $u_{i\pm 1}^n$ si

$$-1 \leq \frac{1}{\gamma_{i\pm\frac{1}{2}}} \left(\frac{f(u_{i\pm 1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i\pm 1}^n - u_i^n} \right) \leq 1$$

$$\bullet \quad \gamma_{i\pm\frac{1}{2}} \geq \left| \frac{f(u_{i\pm 1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i\pm 1}^n - u_i^n} \right| \implies \min(u_i^n, u_{i\pm 1}^n) \leq u_{i\pm\frac{1}{2}}^* \leq \max(u_i^n, u_{i\pm 1}^n)$$

- Les états intermédiaires sont bornés par les valeurs gauche et droite

Preuve

- Si $\forall i \in \mathbb{Z}, \Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\gamma_{i+\frac{1}{2}}}$ alors $1 - \lambda_{i-\frac{1}{2}} - \lambda_{i+\frac{1}{2}} \geq 0$
- Sous ces condition, u_i^{n+1} s'exprime comme une combinaison convexe
- On peut enfin conclure qu'un principe du maximum discret est assuré si

$$\left| \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right| \leq \gamma_{i+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Remarque

- Le caractère TVD et la stabilité L_∞ requièrent les même conditions simplement avec un CFL deux fois plus petite pour la stabilité
- On voit aussi que la stabilité L_∞ implique le caractère TVD de la méthode

Exemples de schémas TVD

- Lax-Friedrichs : $\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

↪ TVD sous la condition CFL $\forall i \in \mathbb{Z}, \Delta t \leq \left| \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)} \right| \Delta x$

↪ Pas de stabilité L_∞ car $\gamma_{i+\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}$

- Lax-Friedrichs global : $\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \sup_u |a(u)|$

↪ TVD sous la condition CFL $\forall i \in \mathbb{Z}, \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sup_u |a(u)|}$

↪ Stable L_∞ sous la condition CFL $\forall i \in \mathbb{Z}, \Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\sup_u |a(u)|}$

Exemples de schémas TVD

- Murman-Roe : $\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \left| \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right| & \text{si } u_i^n \neq u_{i+1}^n \\ |a(u_i^n)| & \text{si } u_i^n = u_{i+1}^n \end{cases}$

$\hookrightarrow$ TVD sous la condition CFL $\forall i \in \mathbb{Z}, \Delta t \leq \left| \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)} \right| \Delta x$

$\hookrightarrow$ Stable L_∞ sous la condition $\forall i \in \mathbb{Z}, \Delta t \leq \frac{1}{2} \left| \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)} \right| \Delta x$

Remarque

- $\left| \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right| = a(\tilde{u})$ avec $\tilde{u} \in [\min(u_i^n, u_{i+1}^n), \max(u_i^n, u_{i+1}^n)]$
- Les trois schémas précédents sont TVD sous une même condition CFL

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sup_u |a(u)|}$$

Qu'en est-il de Lax-Friedrichs local (Rusanov) ?

- Rusanov : $\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \max \left(|a(u_i^n)|, |a(u_{i+1}^n)| \right)$

$\hookrightarrow$ Condition CFL pour être TVD $\forall i \in \mathbb{Z}, \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max_i |a(u_i^n)|}$

$\hookrightarrow$ Condition CFL pour être stable L_∞ $\forall i \in \mathbb{Z}, \Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\max_i |a(u_i^n)|}$

- Cependant, qu'en est-il de la condition $\gamma_{i+\frac{1}{2}} \geq \left| \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right|$?

- Si le flux $f(\cdot)$ est convexe ou concave, le schéma sera TVD ou stable L_∞

- Dans le cas général, le schéma de Rusanov ne sera ni TVD ni stable L_∞

Remarque

- On peut récupérer toutes les bonnes propriétés en posant

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \sup_{u \in I(u_i^n, u_{i+1}^n)} |a(u)|$$

Burgers : collision entre un choc et une détente

$$\bullet \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0.3, \\ -1, & \text{si } x \in]0.3, 0.7[, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x > 0.7. \end{cases} \end{cases}$$

- Jusqu'à $t = 0.8$, la solution consiste en une onde de choc à gauche se propageant à la vitesse $S = -\frac{1}{2}$, et une onde de détente à droite
- À $t = 0.8$, l'éventail de la détente rencontre le choc
- Ces deux ondes forment un nouveau choc défini par

$$x_c(t) = 0.7 - \sqrt{0.8} t$$

- À l'instant final $t = 3.2$, le choc se situe au point $x = -0.9$ et les valeurs gauche et droite valent respectivement 0 et $\frac{1}{2}$

Schéma numérique

- Schéma volumes finis avec solveur de Rusanov
- Sur 500 mailles uniforme pour le domaine $[-1.2, 1]$

Burgers : collision entre un choc et une détente

Burgers : collision entre un choc et une détente

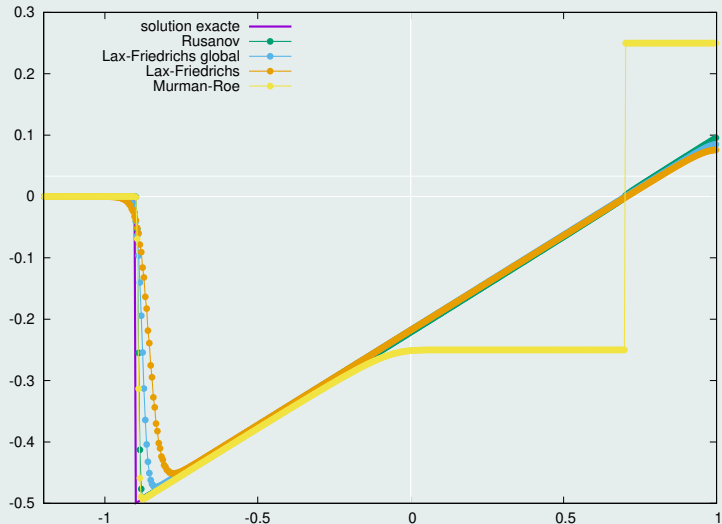


Figure : Comparaison entre différents types de flux numériques

Buckley : problème à flux non-convexe

- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]-\frac{1}{2}, 0[, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

- Le flux non-convexe est défini par $f(u) = \frac{4u^2}{4u^2 + (1-u)^2}$

Schéma numérique

- Schéma volumes finis avec différents types de solveur
- Avec 200 mailles uniforme pour le domaine $[-1, 1]$

Buckley : problème à flux non-convexe

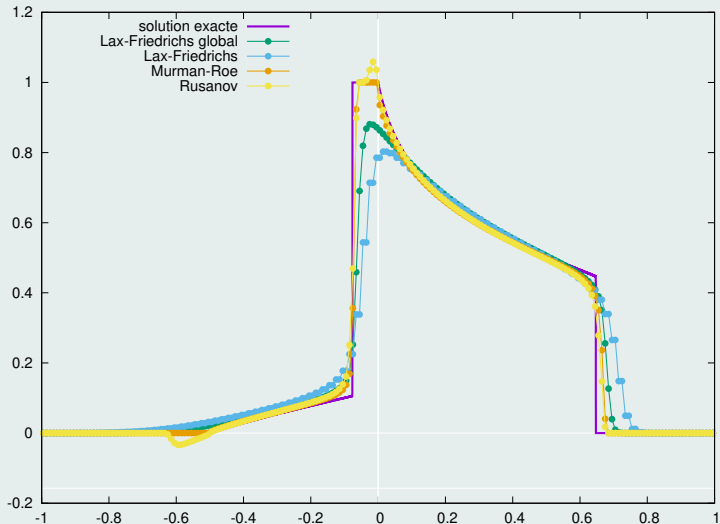


Figure : Comparaison entre différents types de flux numériques

Buckley : problème à flux non-convexe

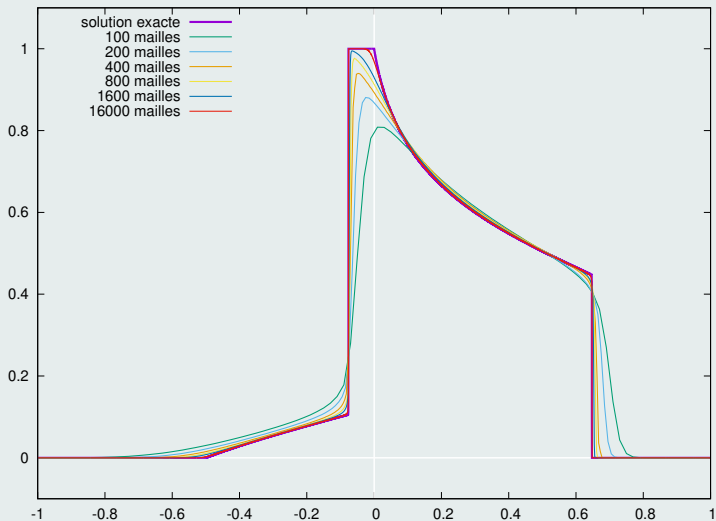


Figure : Convergence du schéma Lax-Friedrichs global

Conservation multidimensionnelle

- $\partial_t u(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{F}(u(\mathbf{x}, t)) = 0$
- $\bar{u}_\Omega(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(\mathbf{x}, t) dV$
- $\bar{u}_\Omega(t_{n+1}) = \bar{u}_\Omega(t_n) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(u(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{N} dS$

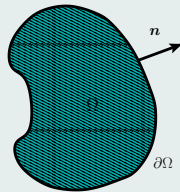
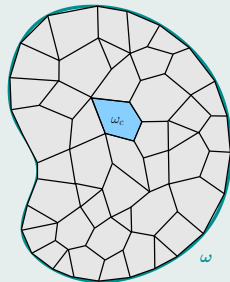


Schéma Volumes Finis

- Partition du domaine $\Omega = \bigcup_c \Omega_c$
- $\mathcal{V}_c$ ensemble des voisins de Ω_c
- L_{cv} , $\mathbf{N}_{cv}$ longueur et normale de Ω_c
- $u_c^{n+1} = u_c^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_c|} \sum_{v \in \mathcal{V}_c} L_{cv} \mathcal{F}(u_c^n, u_v^n, \mathbf{N}_{cv})$
- $\mathcal{F}(u, v, \mathbf{N}) = \frac{(\mathbf{F}(u) + \mathbf{F}(v)) \cdot \mathbf{N}}{2} - \frac{\gamma(u, v)}{2} (v - u)$



Advection linéaire avec $\mathbf{c} = (1, 1)^t$ et $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$

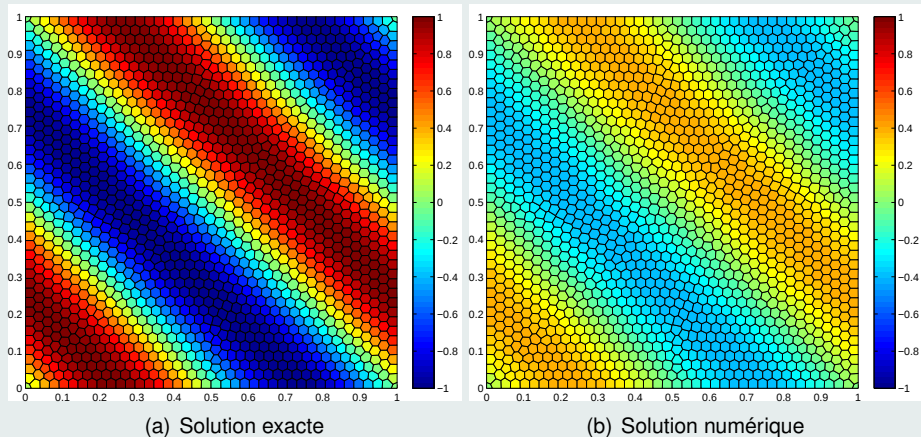


Figure : Comparaison entre solution numérique et solution exacte après une période sur un maillage constitué de 1600 mailles polygonales

Ordre d'approximation

- Ordre d'approximation $\simeq$ vitesse de convergence vers la solution exacte
- On considère que le problème admet une solution régulière $u(x, t)$
- Soit $u_h(x, t)$ la solution numérique obtenu avec Δx et Δt
- Le schéma sera dit d'ordre p en espace et q en temps si, à l'instant t

$$\varepsilon_{\Delta x, \Delta t} \equiv \|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\| = O(\Delta x^p + \Delta t^q)$$

- On appelle ordre global de la méthode $\alpha = \min(p, q)$

Remarques

- Tous les schémas VF présentés sont d'ordre 1
- Dans le cas où $\Delta x \simeq \Delta t$, on peut vérifier numériquement l'ordre de convergence de la méthode en faisant

$$\alpha = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{\varepsilon_{\Delta x, \Delta t}}{\varepsilon_{\Delta x \setminus 2, \Delta t \setminus 2}} \right)$$

- Si la solution exacte est discontinue, $\alpha < 1$

Advection linéaire avec $u_0(x) = \sin(2\pi x)$

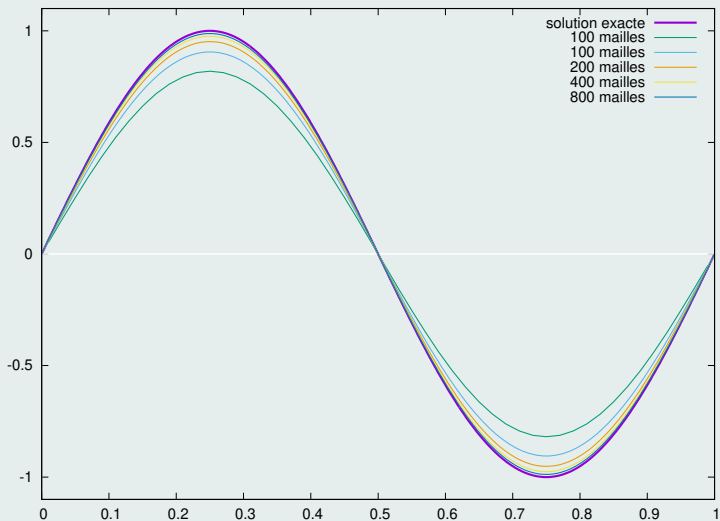


Figure : Convergence du schéma VF upwind après une période

Taux de convergence

	L_1		L_2	
h	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$
$\frac{1}{50}$	1.20E+0	0.936	1.34E+0	0.936
$\frac{1}{100}$	6.31E-1	0.968	7.00E-1	0.968
$\frac{1}{200}$	3.22E-1	0.984	3.58E-1	0.984
$\frac{1}{400}$	1.63E-1	0.992	1.81E-1	0.992
$\frac{1}{800}$	8.20E-2	-	9.10E-2	-

Table: Taux de convergence pour le cas de l'advection linéaire après une période

Remarques générales sur les schémas VF d'ordre 1

- + Très simple à mettre en place
- + Théorie bien connue avec une vaste littérature sur le sujet
- + Schémas très robustes (TVD, entropiques, ...)
- + Très peu coûteux en ressources informatiques
- Très peu précis - trop grande diffusion numérique
- Nécessite beaucoup de mailles pour atteindre une précision acceptable

Comparaison entre des schémas VF d'ordre 1 et d'ordre 2

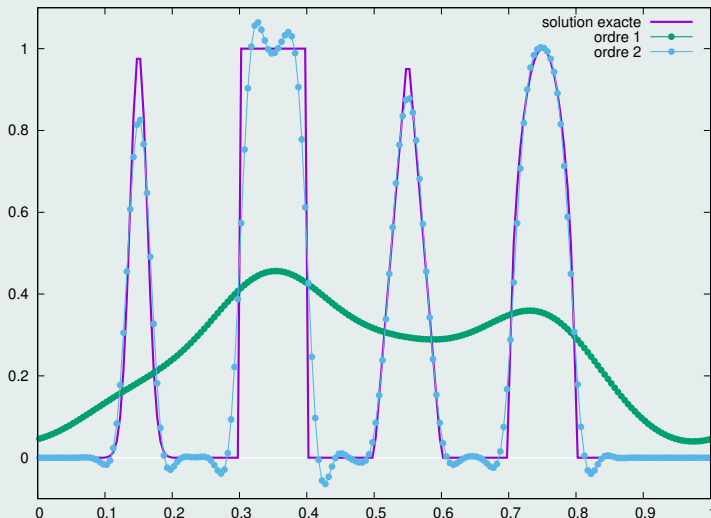


Figure : Advection d'un signal composite après une période avec 200 mailles