

Chapitre 3

Résolution analytique des lois de conservation scalaires

François Vilar

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier



IMAG
INSTITUT MONTEPPELLIERAIN
ALEXANDER GROTHENDIECK



- 1 Introduction
- 2 Solutions fortes
- 3 Solutions faibles
- 4 Non-unicité des solutions faibles
- 5 Solutions faibles entropiques
- 6 Problème de Riemann
- 7 Exemple : Trafic routier

Définition

- Lois de Conservation Scalaires (LCS) :

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0, \quad (1)$$

où $u(x, t)$ est la solution et $f(u)$ la fonction flux

- Équation type des EDP hyperboliques

Pourquoi conservation ?

- Soit un volume de contrôle $I = [a, b]$

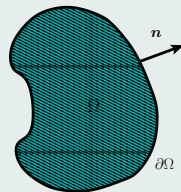
$$\int_I (1) : \quad \int_I \partial_t u \, dx = - \int_I \partial_x f(u) \, dx$$

$$\implies \quad \frac{d}{dt} \int_I u \, dx = f(u)|_a - f(u)|_b$$

- L'évolution temporelle de l'intégrale de u est dictée par ce qui rentre dans I moins ce qu'il en sort, et ceci en terme de flux**

Conservation multidimensionnelle

- $\partial_t u(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{F}(u(\mathbf{x}, t)) = 0$
- $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dV = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(u) \cdot \mathbf{n} dS$



Difficulté fondamentale des EDP hyperboliques

- **Même en considérant une fonction flux $f(\cdot)$ et une donnée initiale $u(\cdot, 0)$ très régulières (par exemple C^∞), la solution peut devenir discontinue en temps fini**
- Exemple standard : équation de Burgers

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Apparition d'une discontinuité en temps fini

Problème de Cauchy

$$\bullet \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{C})$$

avec $f \in \mathcal{C}^2$ et $u_0 \in \mathcal{C}^1$

Définition : solution forte

On dit que $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution forte de (C) si :

- $u \in \mathcal{C}^1$
- u satisfait l'équation en tout point

Comment obtenir une telle solution ?

- Idée : se ramener à une EDO qu'on saurait résoudre

$\implies$ Méthode des caractéristiques

Forme non-conservative

$$\bullet \partial_t u + f'(u) \partial_x u = 0$$

Solution régulière

Question

- Existe-t-il une courbe $x(t)$ sur laquelle la solution u est conservée ?

Variation temporelle le long d'une courbe

- Soit la courbe $x(X, t)$ telle que $x(X, 0) = X$
- La variation temporelle de la solution le long de cette courbe s'écrit :

$$\frac{d}{dt} u(x(X, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x(X, t), t) + \frac{\partial x(X, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u(x(X, t), t)$$

Courbe caractéristique

- $$\begin{cases} \frac{\partial x(X, t)}{\partial t} = f'(u(x(X, t), t)), \\ x(X, 0) = X. \end{cases}$$
- $$\frac{d}{dt} u(x(X, t), t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \implies u(x(X, t), t) = u_0(X), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Solution forte

- $u(x(X, t), t) = u_0(X), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$
- $x(X, t) = a(u_0(X)) t + X \quad \text{avec} \quad a(u) = f'(u)$

Remarque

- On connaît l'expression de x en fonction de X et t
- Si on trouve la fonction réciproque $X(x, t)$, alors la solution forte s'écrit

$$u(x, t) = u_0(X(x, t))$$

Exemple : advection linéaire

- $\partial_t u + c \partial_x u = 0, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{la vitesse de transport}$
- $f(u) = c u \implies a(u) = c$
- $x(X, t) = c t + X \iff X(x, t) = x - c t$
- La solution forte s'écrit donc :

$$u(x, t) = u_0(x - c t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

Équation de transport : $c = 1$

Cas général

- Il est très difficile de trouver la fonction réciproque $X(x, t)$
- On peut utiliser une méthode de résolution numérique de l'équation

$$g(X) = 0 \quad \text{avec} \quad g(X) = a(u_0(X)) t + X - x,$$

pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ donné

Exemple : méthode de Newton

- $X_0 = x$
- $X_{n+1} = X_n - \frac{g(X_n)}{g'(X_n)}$
- Si $|X_{n+1} - X_n| \leq tol$ alors $X = X_{n+1}$

Remarque : Hypothèse cruciale

- L'existence de la solution forte repose sur l'hypothèse qu'en tout point $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, il n'y a qu'**une seule** caractéristique qui y passe

Exemple : Burgers

$$\bullet \begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$

$$\bullet f(u) = \frac{1}{2} u^2 \implies a(u) = u$$

$$\bullet x(X, t) = u_0(X) t + X$$

$$= \begin{cases} t + X, & \text{si } X \leq 0, \\ (1 - X) t + X, & \text{si } X \in [0, 1], \\ X, & \text{si } X \geq 1. \end{cases}$$

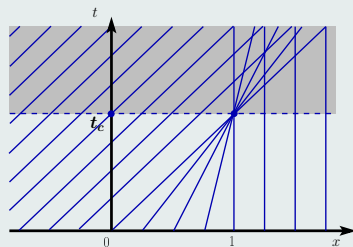


Figure : Courbes caractéristiques dans le plan (x, t)

Solution forte

(à faire en cours)

- Par la méthode des caractéristiques, on peut obtenir la solution forte :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq t, \\ \frac{1-x}{1-t}, & \text{si } x \in [t, 1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_c[$$

- t_c est le temps critique où les caractéristiques se croisent

Équation de Burgers : solution forte

Théorème

On suppose que :

- $f \in \mathcal{C}^2$ et $u_0 \in \mathcal{C}^1$,
- la borne inférieure $D = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx} a(u_0(x)) \right)$ est réelle,

alors en posant

$$\bullet \quad t_c = \begin{cases} +\infty & \text{si } D \geq 0 \\ -\frac{1}{D} & \text{si } D < 0 \end{cases}$$

le problème de Cauchy admet une solution unique $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0, t_c[$

Exemple : Burgers

- $f(u) = \frac{1}{2} u^2$ avec $u_0(x) = \sin(2\pi x)$
- $a(u_0(x)) = \sin(2\pi x) \implies \frac{d}{dx} a(u_0(x)) = 2\pi \cos(2\pi x)$
- $D = -2\pi < 0 \implies t_c = \frac{1}{2\pi} \simeq 0.1592$

Remarque

- La théorie des solutions fortes ($u \in \mathcal{C}^1$) s'étend aux fonction **continues et continûment dérivables par morceaux** ($\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux)
- L'équation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ est vérifiée partout sauf sur les lignes de perte de régularité $\mathcal{C}^1$
- Sur ces même lignes, l'équation est vraie séparément de part et d'autre

Théorème

Soit $a_0(x) = a(u_0(x))$. On suppose que :

- $a_0 \in \mathcal{C}^0 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et dérivable par morceaux
- a_0 admet en tout point une dérivée à gauche et à droite :

$$D \leq a'_0(x^\pm) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors en posant

$$\bullet \quad t_c = \begin{cases} +\infty & \text{si } D \geq 0 \\ -\frac{1}{D} & \text{si } D < 0 \end{cases}$$

le problème de Cauchy admet une solution unique sur $\mathbb{R} \times [0, t_c[$

Retour à l'exemple précédent

- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$
- $a_0(x) = u_0(x) \implies a'_0(x^\pm) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Le temps critique est donc $t_c = 1$
- Par la méthode des caractéristiques, on obtient la solution forte :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq t, \\ \frac{1-x}{1-t}, & \text{si } x \in [t, 1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$$

Question

- Que se passe-t-il après l'instant t_c ?
 - Existe-t-il une solution après l'instant t_c ?
 - Est-ce utile de connaître la solution après l'apparition de discontinuités ?
- $\implies$ **Problème essentiel, théorie des solutions faibles**

Équation de Burgers : solution faible

Rappel

- $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ à support compact

Exemple : $\phi(x, t) = 0$ si $t > T$ ou $|x| > A$

Remarque

- u solution forte de (C)
- $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

$$- \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \phi \, dx dt = 0$$

$$\iff \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) \, dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) \, dx = 0 \quad (F)$$

- Les dérivées ∂_t et ∂_x sont à présent portées par ϕ
- (F) a un sens dès que $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

Définition : solution faible

- On dit que $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est une solution faible de (C) si u vérifie (F) $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

Remarque

- u solution forte $\implies u$ solution faible
- u solution faible $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\implies u$ solution forte

Hypothèses

On considérera uniquement :

- Les solutions faibles $\mathcal{C}^1$ par morceaux
- Un nombre fini de discontinuité (*sauts*) dans l'espace (x, t)
- Chaque discontinuité Σ admet une paramétrisation $(\sigma(t), t)$ avec $\sigma(\cdot)$ fonction $\mathcal{C}^1$
- On note $\mathbf{n}$ une normale de Σ définie comme $\mathbf{n} = (n_x, n_t)^t = (-1, \sigma'(t))^t$
- Chaque solution u admet de part et d'autre de chaque courbe des limites notée u^- et u^+ solution fortes de (C)

Question

- Toutes les discontinuités sont-elles admissibles ?

Relation de Rankine-Hugoniot (R-H)

- La solution u vérifie la relation de *saut* suivante le long de Σ :

$$[f(u)] = \sigma'(t) [u],$$

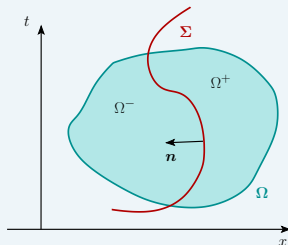
où $[\phi] = \phi^+ - \phi^-$

- Cette relation nous permet de définir la vitesse de propagation $S = \sigma'(t)$ des discontinuités admissibles comme :

$$S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$$

Preuve

- u solution faible et $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$
- $\int_{\Omega} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt = 0$
- $\int_{\Omega^-} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt + \int_{\Omega^+} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt = 0$



Preuve

- u est $\mathcal{C}^1$ sur Ω^- et Ω^+
- $$-\int_{\Omega^-} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \phi \, dx dt + \int_{\partial\Omega^- \cap \Sigma} (u^- \phi n_t^- + f(u^-) \phi n_x^-) \, dx dt -$$

$$\int_{\Omega^+} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \phi \, dx dt + \int_{\partial\Omega^+ \cap \Sigma} (u^+ \phi n_t^+ + f(u^+) \phi n_x^+) \, dx dt = 0$$
- u est solution forte sur Ω^- et Ω^+
- $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$ et $\mathbf{n} = (-1, \sigma'(t))$
- $$\int_{\partial\Omega^+ \cap \Sigma} ((u^+ - u^-) n_t + (f(u^+) - f(u^-)) n_x) \phi \, dx dt = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$$
- $$(u^+ - u^-) n_t + (f(u^+) - f(u^-)) n_x = 0$$
- $$f(u^+) - f(u^-) = \sigma'(t) (u^+ - u^-)$$

Retour à l'exemple précédent

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 1} u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1, \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$\bullet S = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1}{2} \quad \text{Rankine-Hugoniot}$$

• Pour $t \geq 1$, le choc se propage à la vitesse $\frac{1}{2}$

$$\bullet x_c(t) = 1 + \frac{t-1}{2} = \frac{1+t}{2} \quad \text{Courbe du choc}$$

$$\bullet u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \frac{1+t}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{1+t}{2} \end{cases}, \quad \forall t \geq 1.$$

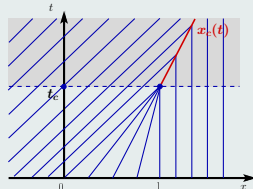


Fig. : Courbes caractéristiques

Question

- Si (C) admet une solution forte, cette solution est **unique**
- Qu'en est-il des solutions faibles ?

Non-unicité des solutions faibles - Exemple

- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$
- $$f(u) = \frac{1}{2} u^2 \implies a(u) = u$$
- $$x(X, t) = \begin{cases} X, & \text{si } X < 0, \\ t + X, & \text{si } X > 0. \end{cases}$$

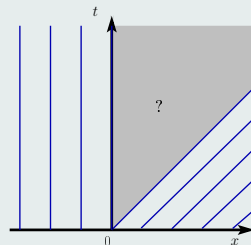


Figure : Courbes caractéristiques

Solution discontinue

- $$S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{1}{2} \quad [\text{R-H}]$$
- $$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{1}{2} t \\ 1, & \text{si } x > \frac{1}{2} t \end{cases}$$
- Choc de détente

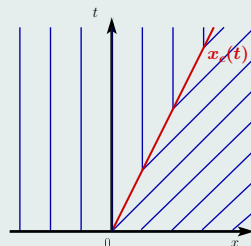


Figure : Courbes caractéristiques

Solution faible discontinue

Solution faible régulière

- $$\begin{cases} \frac{\partial x(X, t)}{\partial t} = a(u(x(X, t), t)) \\ x(X, 0) = X. \end{cases}$$
- $$u(x(X, t), t) = a^{-1}\left(\frac{\partial x(X, t)}{\partial t}\right)$$
- $a(u) = u$ et $\frac{\partial x(0, t)}{\partial t} = \xi = \frac{x}{t}$
- $$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{t}, & \text{si } x \in [0, t], \\ 1, & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

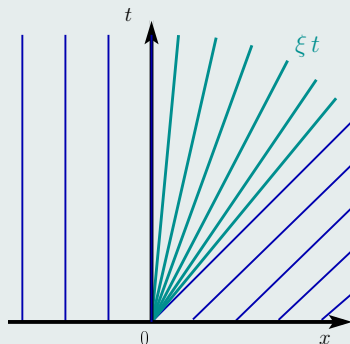


Figure : Courbes caractéristiques

Remarque

- On a trouvé deux solutions faibles pour ce problème
- Certains problèmes admettent une infinité de solutions faibles
- Peut-on trouver un critère permettant de sélectionner la *bonne* solution ?

Solution faible régulière

Second principe de la thermodynamique

- L'entropie d'un système ne fait que croître
- Transformation réversible : $\Delta S = 0$
- Transformation irréversible : $\Delta S > 0$

Définition

- Une fonction strictement convexe $\eta \in \mathcal{C}^2$ est une entropie de l'équation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ ssi $\exists \psi \in \mathcal{C}^1$ appelé flux d'entropie tel que si u est une solution forte alors u satisfait aussi la loi de conservation

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) = 0$$

Cas scalaire

- Toute fonction $\eta \in \mathcal{C}^2$ strictement convexe est une entropie car il suffit de choisir ψ tel que $\psi'(u) = \eta'(u) f'(u)$

$$\eta'(u) (\partial_t u + \partial_x f(u)) = \partial_t \eta(u) + \eta'(u) f'(u) \partial_x u = \partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) = 0$$

Définition

- Une solution faible u de (C) est dite entropique ssi, $\forall$ entropie η associée à ψ , u satisfait l'inégalité d'entropie suivante

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\eta(u) \partial_t \phi + \psi(u) \partial_x \phi) \, dx dt \geq 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$$

- On note généralement que $\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) \leq 0$ en formulation faible

Explications

- Dans la physique des milieux continus, il n'y a pas de discontinuité des variables thermodynamiques
- Il y a toujours un terme de viscosité, aussi petit soit-il (exemple : viscosité de l'air sur les vagues)
- Considérons l'équation $\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon \quad (\mathcal{V}^\varepsilon)$
- La viscosité régularise (lisse) la solution
- Une solution faible u sera entropique si elle est la limite d'une solution visqueuse u^ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Preuve

- $\eta'(u^\varepsilon) \times (\mathcal{V}^\varepsilon) : \quad \partial_t \eta(u^\varepsilon) + \partial_x \psi(u^\varepsilon) = \varepsilon \eta'(u^\varepsilon) \partial_{xx} u^\varepsilon$

$$= \varepsilon \partial_{xx} \eta(u^\varepsilon) - \varepsilon \eta''(u^\varepsilon) (\partial_x u^\varepsilon)^2$$
- $\eta(\cdot)$ est strictement convexe $\implies \eta''(u^\varepsilon) > 0$
- $\partial_t \eta(u^\varepsilon) + \partial_x \psi(u^\varepsilon) \leq \varepsilon \partial_{xx} \eta(u^\varepsilon)$
- Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient $\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) \leq 0$ en formulation faible

Théorème

- On suppose que $f \in \mathcal{C}^2$ et que $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$
- Alors le problème de Cauchy (C) admet une unique solution faible entropique bornée dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- De plus, cette solution vérifie le principe du maximum

Principe du maximum

- Si $\alpha \leq u_0(x) \leq \beta$ presque partout dans $\mathbb{R}$
- Alors $\forall t > 0, \quad \alpha \leq u(x, t) \leq \beta$ presque partout dans $\mathbb{R}$

Lemme

- Soit u une solution faible $\mathcal{C}^1$ par morceaux de (C)
- Alors u est l'unique solution entropique ssi

$$\psi(u^+) - \psi(u^-) \leq S(\eta(u^+) - \eta(u^-))$$

- En tout point de chaque courbe de discontinuité
- Pour tout couple (η, ψ) entropie - flux d'entropie

Preuve

- Même démo que pour [R-H] en partant de l'inégalité d'entropie

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\eta(u) \partial_t \phi + \psi(u) \partial_x \phi) dx dt \geq 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$$

Proposition

- Soit un flux $f \in \mathcal{C}^2$ strictement convexe (*respectivement concave*)
- Alors, si u est la solution entropique, elle vérifie sur chaque discontinuité

$$u^- > u^+ \quad (\text{respectivement } u^- < u^+)$$

Preuve

- Introduisons deux fonctions

$$g(u) = f(u) - f(u^+) - S(u - u^+) \quad \text{et} \quad H(u) = \psi(u) - S\eta(u)$$

- Par définition et selon Rankine-Hugoniot $g(u^+) = g(u^-) = 0$

- D'après le lemme précédent, $H(u^+) - H(u^-) \leq 0$

$$\bullet \int_{u^-}^{u^+} H'(v) dv \leq 0 \iff \int_{u^-}^{u^+} (\psi'(v) - S\eta'(v)) dv \leq 0$$

$$\bullet \int_{u^-}^{u^+} \eta'(v) (f'(v) - S) dv \leq 0 \iff \int_{u^-}^{u^+} \eta'(v) g'(v) dv \leq 0$$

$$\bullet - \int_{u^-}^{u^+} \eta''(v) g(v) dv + \underbrace{\left[\eta'(v) g(v) \right]_{u^-}^{u^+}}_{=0} \leq 0 \iff \int_{u^-}^{u^+} \underbrace{\eta''(v)}_{>0} g(v) dv \geq 0$$

$$\bullet g(u) = f(u) - f(u^+) - S(u - u^+) \iff g''(u) = f''(u)$$

- f est strict. convexe (resp. concave), donc $g''(u) > 0$ (resp. $g''(u) < 0$)

Preuve

- La fonction g est strictement convexe (*respectivement concave*)

$$g(u) = g((1 - \theta) u^- + \theta u^+) \underbrace{\quad}_{\text{resp. } >} (1 - \theta) g(u^-) + \theta g(u^+) = 0$$

- Par conséquent, si f est strictement convexe $\implies u^- > u^+$
 si f est strictement concave $\implies u^- < u^+$

Remarque

- Comme $f \in \mathcal{C}^2$ et d'après la relation de Rankine-Hugoniot

$$S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} = f'(\gamma) \quad \text{avec } \gamma \in]\min(u^-, u^+), \max(u^-, u^+)[$$

- Si $f \in \mathcal{C}^2$ strictement convexe $\implies f'$ est strictement croissante

$$u^- > u^+ \implies f'(u^-) > S > f'(u^+)$$

- Si $f \in \mathcal{C}^2$ strictement concave $\implies f'$ est strictement décroissante

$$u^- < u^+ \implies f'(u^-) > S > f'(u^+)$$

Condition d'entropie de Lax

- Si $f \in \mathcal{C}^2$ est strictement convexe ou concave, un choc est entropique ssi

$$a(u^-) > S > a(u^+),$$

où $S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$ la vitesse de propagation du choc

Remarques

- La vitesse de la discontinuité est supérieure à la vitesse de propagation en aval et inférieure à la vitesse en amont
- Les caractéristiques rentrent dans le choc
- Un choc entropique est un processus irréversible au cours duquel on perd de l'information. On ne peut pas savoir d'où vient la solution

Retour à l'exemple précédent : solution faible discontinue

- $u^- = 0$ et $u^+ = 1 \implies a(u^-) = 0$ et $a(u^+) = 1$
- $S = \frac{1}{2} \implies$ Solution faible non-entropique

Problème de Riemann

- Problème de Cauchy avec une donnée initiale à deux états constants

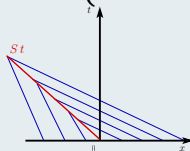
$$\bullet \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^-, & \text{si } x < 0 \\ u^+, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

où u^- et u^+ sont constantes données, et $f(\cdot) \in C^2$

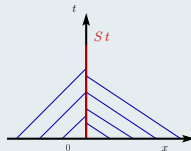
$f(\cdot)$ strictement convexe et $u^- > u^+$

- $a(u^-) > a(u^+) \implies$ choc avec $S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$

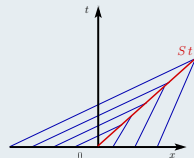
- $u(x, t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < S, \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > S. \end{cases}$



(a) Choc à gauche



(b) Choc centré



(c) Choc à droite

Problème de Riemann

- Problème de Cauchy avec une donnée initiale à deux états constants

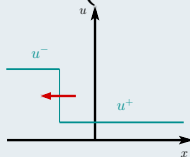
$$\bullet \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^-, & \text{si } x < 0 \\ u^+, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

où u^- et u^+ sont constantes données, et $f(\cdot) \in \mathcal{C}^2$

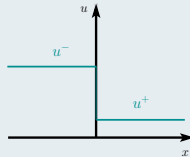
$f(\cdot)$ strictement convexe et $u^- > u^+$

- $a(u^-) > a(u^+) \implies$ choc avec $S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$

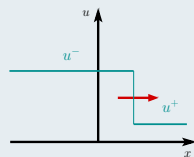
$$\bullet u(x, t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < S, \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > S. \end{cases}$$



(a) Choc à gauche



(b) Choc centré



(c) Choc à droite

Remarque : invariance par homothétie

- Soit $u(x, t)$ solution de l'équation $\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0$
- Soit le changement de variables $\tilde{x} = \lambda x$ et $\tilde{t} = \lambda t$
- Comme $\partial_x = \partial_{\tilde{x}} \tilde{x} \partial_{\tilde{x}} = \lambda \partial_{\tilde{x}}$ et $\partial_t = \partial_{\tilde{t}} \tilde{t} \partial_{\tilde{t}} = \lambda \partial_{\tilde{t}}$, on obtient

$$\partial_t u(\tilde{x}, \tilde{t}) + \partial_x f(u(\tilde{x}, \tilde{t})) = \lambda (\partial_{\tilde{t}} u(\tilde{x}, \tilde{t}) + \partial_{\tilde{x}} f(u(\tilde{x}, \tilde{t}))) = 0$$

- $u(\lambda x, \lambda t)$ est donc aussi solution de l'équation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$
- On va chercher des solutions de la forme $u(x, t) = v(\frac{x}{t})$

Solutions auto-semblables ou auto-similaires

$f(\cdot)$ strictement convexe et $u^+ > u^-$

- $a(u^+) > a(u^-) \implies$ détente
- Soit la fonction $u(x, t) = v(\xi)$ avec $\xi = \frac{x}{t}$
- $\partial_t v(\xi) = v'(\xi) \partial_t \xi = -\frac{\xi}{t} v'(\xi)$ et $\partial_x v(\xi) = v'(\xi) \partial_x \xi = \frac{1}{t} v'(\xi)$
- $u(x, t)$ sera solution si $v'(\xi) (a(v) - \xi) = 0$
- En excluant la fonction constante $v'(\xi) = 0$, on obtient que $a(v) = \xi$

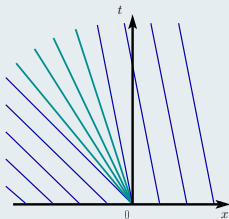
$f(\cdot)$ strictement convexe et $u^+ > u^-$

- Comme $a(\cdot)$ est strictement croissante, a réalise une bijection entre

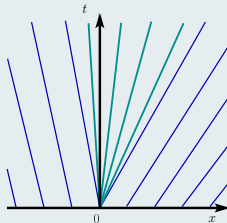
$$[u^-, u^+] \longleftrightarrow [a(u^-), a(u^+)]$$

- Donc $v(\xi) = a^{-1}(\xi)$ pour tout $\xi \in [a(u^-), a(u^+)]$

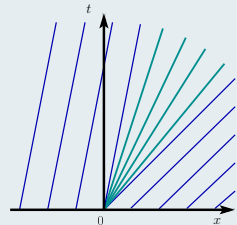
$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < a(u^-), \\ a^{-1}(\frac{x}{t}), & \text{si } \frac{x}{t} \in [a(u^-), a(u^+)], \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > a(u^+). \end{cases}$$



(a) Déténté à gauche



(b) Déténté centré



(c) Déténté à droite

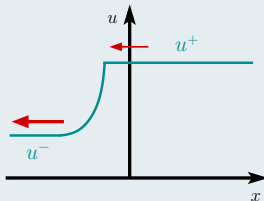
$f(\cdot)$ strictement convexe et $u^+ > u^-$

- Comme $a(\cdot)$ est strictement croissante, a réalise une bijection entre

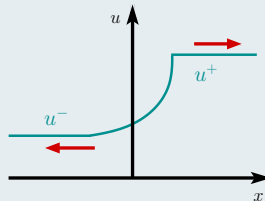
$$[u^-, u^+] \longleftrightarrow [a(u^-), a(u^+)]$$

- Donc $v(\xi) = a^{-1}(\xi)$ pour tout $\xi \in [a(u^-), a(u^+)]$

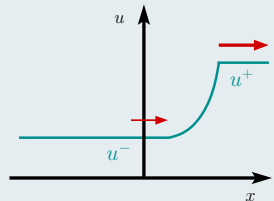
$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < a(u^-), \\ a^{-1}(\frac{x}{t}), & \text{si } \frac{x}{t} \in [a(u^-), a(u^+)], \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > a(u^+). \end{cases}$$



(a) Dé détente à gauche



(b) Dé détente centré



(c) Dé détente à droite

Conclusion

- On voit que dans tous les cas, l'unique solution entropique bornée du problème de Riemann ne dépend que de $\frac{x}{t}$, solution dite auto-semblable.

$$u(x, t) = \mathcal{W} \left(\frac{x}{t}; u^-, u^+ \right)$$

Proposition

- L'unique solution entropique du problème de Riemann vérifie

$$\mathcal{W} \left(\frac{x}{t}; u^-, u^+ \right) = \begin{cases} u^- & \text{si } \frac{x}{t} < \inf_{u \in I(u^-, u^+)} (a(u)) \\ u^+ & \text{si } \frac{x}{t} > \sup_{u \in I(u^-, u^+)} (a(u)) \end{cases}$$

où $I(u^-, u^+) = [\min(u^-, u^+), \max(u^-, u^+)]$

Exemple : Trafic routier

- $\rho(x, t)$ la densité de véhicules le long d'une autoroute rectiligne et infinie
- $N(x_0, x_1, t) = \int_{x_0}^{x_1} \rho(x, t) dx$ le nombre de voitures entre x_0 et x_1
- $v(x, t)$ la vitesse des véhicules
- $f(x, t) = \rho(x, t) v(x, t)$ facteur de perte ou de gain de véhicules
- On obtient alors l'équation de conservation suivante

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0.$$

- Modèle LWR (Lighthill-Whitham-Richards) :

$$v(\rho) = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

- $u_{\max} = 130$ et $\rho_{\max} = \frac{1}{\mathcal{L}}$ avec $\mathcal{L}$ la longueur moyenne des véhicules
- Version adimensionnée $u_{\max} = 1$ et $\rho_{\max} = 1$

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho (1 - \rho)) = 0.$$

Trafic routier : problème simple

- $$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho(1 - \rho)) = 0, \\ \rho_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{8}, & \text{si } x \in]0, 1[, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$
- $$f(\rho) = \rho(1 - \rho) \implies a(\rho) = 1 - 2\rho$$
- $$x(X, t) = a(\rho_0(X))t + X$$

$$= \begin{cases} X, & \text{si } X < 0, \\ \frac{3}{4}t + X, & \text{si } X \in]0, 1[, \\ \frac{1}{2}t + X, & \text{si } X > 1. \end{cases}$$

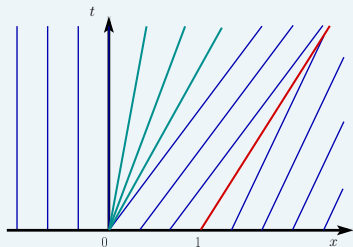


Figure : Courbes caractéristiques dans le plan (x, t)

Choc en 1

- $$S = \frac{f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{8})}{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}} = \frac{5}{8}$$
- $$\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{si } x \in]\frac{3}{4}t, 1 + St[, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > 1 + St. \end{cases}$$

vitesse du choc [R-H]

Détente en 0

- $a'(\rho) = -2 < 0 \implies a(\cdot)$ strictement décroissante
- $a(\cdot)$ réalise une bijection entre $[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}]$ et $[0, \frac{3}{4}]$
- $a(\rho) = b \iff 1 - 2\rho = b \iff a^{-1}(b) = \frac{1-b}{2}$
- $\rho(x, t) = \frac{1-\frac{x}{t}}{2}, \quad \text{si } \frac{x}{t} \in [0, \frac{3}{4}]$

Solution faible entropique

$$\bullet \quad \rho(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1-\frac{x}{t}}{2}, & \text{si } \frac{x}{t} \in [0, \frac{3}{4}], \\ \frac{1}{8}, & \text{si } x \in [\frac{3}{4}t, 1 + St[, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > 1 + St. \end{cases}$$

- Solution valable jusqu'à $t = 8$, instant auquel l'onde de détente rencontre l'onde de choc
- Après ce temps, la droite caractéristique du choc devient courbe et est définie par une EDO non-linéaire : $x'_c(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{x_c(t)}{t}$ avec $x_c(8) = 6$

Trafic routier