

Chapitre 1

Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles

François Vilar

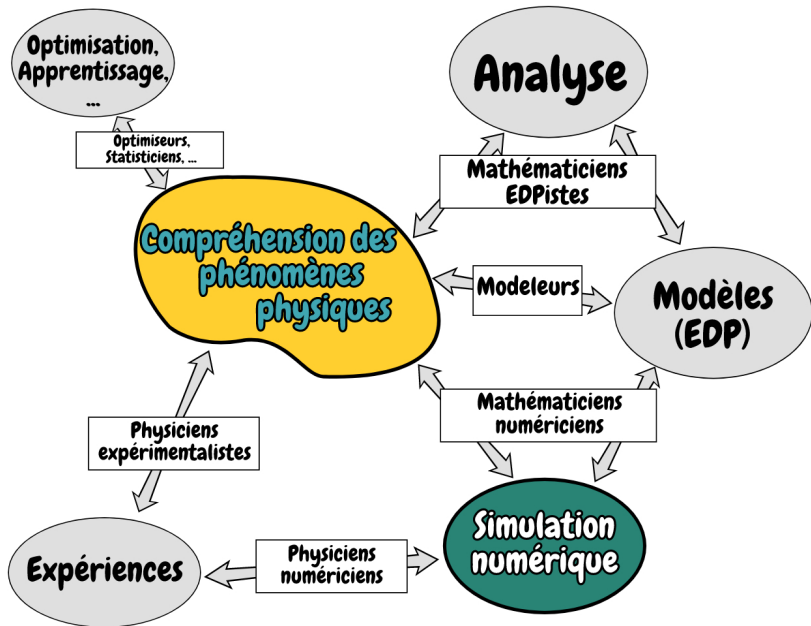
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier



IMAG
INSTITUT MONTELLIERAIN
ALEXANDER GROTHENDIECK



- 1 Compréhension des phénomènes physiques
- 2 Définition
- 3 Exemples d'équations aux dérivées partielles
- 4 Analyse et résolution d'EDP
- 5 Exemples de simulation numérique
- 6 Classification des EDP
- 7 Résolution numérique



- EDO : Équation Différentielle Ordinaire
- EDP : Équation aux Dérivées Partielles ($\text{EDO} \subset \text{EDP}$)

Définition

- Relation entre une fonction et ses dérivées partielles :

$$\Phi\left(x, u(x), (\partial_i u(x))_{i \in [1, d]}, \dots, (\partial_{i_1, \dots, i_m} u(x))_{(i_1, \dots, i_m) \in [1, d]^m}\right) = 0,$$

$$\text{où } u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } \Phi : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s$$

- L'ordre d'une EDP correspond à l'ordre le plus élevé des dérivées

L'équation aux dérivées partielles est dite :

- Linéaire si $\Phi(x, \cdot)$ est linéaire
- Homogène si la fonction nulle est solution
- Scalaire si $s = n = 1$
- Système si $n > 1$

Exemples

$$\bullet -u''(x) + c(x) u(x) = f(x)$$

Équation d'élasticité 1D

$$\bullet \partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0$$

Équation d'advection 1D

$$\bullet \partial_{tt} u(x, t) - c^2 \partial_{xx} u(x, t) = 0$$

Équation des ondes 1D

$$\bullet \partial_t u(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$$

Diffusion de la chaleur

$$\bullet \begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \\ \partial_t \mathbf{q} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \mathbf{I}_d \right) = -g h \nabla \mathbf{z} \end{cases}$$

Système de Saint-Venant

$$\bullet \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}_d) = \mathbf{0} \\ \partial_t (\rho \mathbf{e}) + \nabla \cdot ((\rho \mathbf{e} + p) \mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

Système d'Euler

Analyse des EDP

- Démonstration d'existence, d'unicité ou de régularité des solutions
- Dépendance aux conditions initiales et aux limites
- Étude de comportement asymptotique
- Résolution analytique des EDP

Remarque

- La grande majorité des EDP ou des systèmes d'EDP sont bien trop complexes pour être résolus analytiquement

Analyse Numérique des EDP

- Résolution des EDP par méthodes numériques
- Mise en place de nouveaux schémas numériques
- Étude des propriétés des schémas numériques (consistance, stabilité, convergence, ...)
- Étude des propriétés de la solution approchées obtenue (entropie, positivité, monotonie, ...)
- Calcul scientifique : développement de codes de simulation

Écoulement autour d'un avion



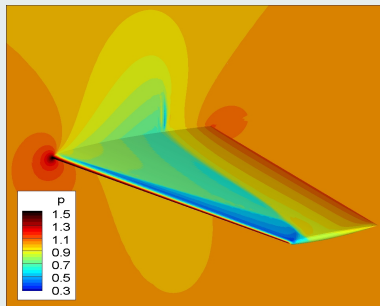
Modélisation

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}_d) = \mathbf{0}, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + p) \mathbf{u}) = 0. \end{cases}$$

Schéma numérique

- Différences Finis
- Volumes Finis
- Éléments Finis
- **Galerkin discontinu**
- HHO

Simulation numérique



Côte de Palavas



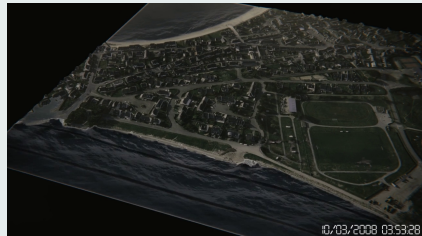
Modélisation

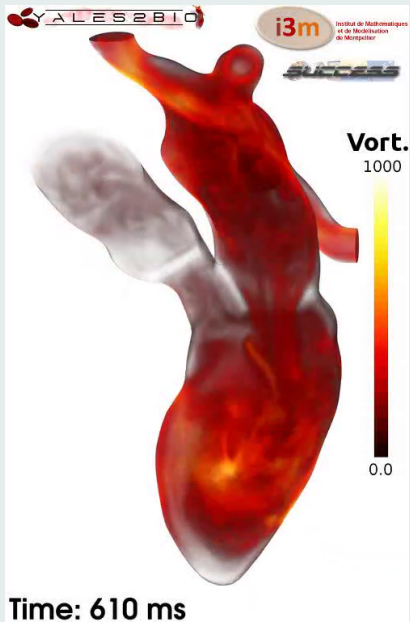
$$\begin{cases} \partial_t u - f v + g \partial_x h + b u = 0, \\ \partial_t v + f u + g \partial_y h + b v = 0, \\ \partial_t h + H (\partial_x u + \partial_y v) = 0. \end{cases}$$

Schéma numérique

- Différences Finis
- **Volumes Finis**
- Éléments Finis
- Galerkin discontinu
- HHO

Simulation numérique





Remarque

- Pour nous aider dans notre analyse, on peut généralement classer les EDP en trois classes d'équations

Classification

- **Hyperboliques** : Phénomènes de propagation ou de conservation
 - ↪ L'information se propage à vitesse finie
 - ↪ La régularité de la solution dépend des conditions initiale et aux bords
 - ↪ Dans le cas non-linéaire, même si ces dernières sont régulières des discontinuités peuvent se former en un temps fini

Exemples : **équation des ondes, lois de conservation scalaires**

- **Elliptiques** : phénomènes stationnaires ou d'équilibre
 - ↪ La solution est tjs régulière, même si les conditions aux bords ne le sont pas
 - ↪ Ces dernières en un point donné affectent la solution en tout point

Exemple : **équation de Poisson**

- **Paraboliques** : elliptiques + temps - phénomènes de diffusion
 - ↪ L'information se propage à une vitesse infinie
 - ↪ La solution est régulière en espace

Exemple : **équation de la chaleur**

EDP scalaires d'ordre 1

- Une EDP scalaire d'ordre 1 à coefficients réels est toujours hyperbolique

- Exemple :
$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \implies \frac{d u(x + c t, t)}{dt} = 0$$
$$\implies u(x + c t, t) = u_0(x)$$
$$\implies u(x, t) = u_0(x - c t)$$

Exemple : équation d'advection linéaire (transport)

Systèmes d'EDP d'ordre 1

- On considère un système d'EDP d'ordre 1 à coefficients réels de la forme

$$\partial_t \mathbf{u}(x, t) + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{0}$$

- Si la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable à valeurs propres réelles, le système est alors hyperbolique

- Démo : $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1}$ avec $\Lambda_{ii} = \lambda_i$ la matrice des valeurs propres

- En posant $\mathbf{w} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{u}$, on obtient que $\partial_t w_i + \lambda_i \partial_x w_i = 0$

- Le système d'EDP se réduit donc à n équations de transports

$\implies$ hyperbolique

Exemple de l'acoustique linéaire

$$\bullet \begin{cases} \partial_t p + \rho_0 a_0^2 \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \frac{1}{\rho_0} \partial_x p = 0. \end{cases} \implies \mathbf{u} = (p, v)^t \text{ et } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 a_0^2 \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \lambda_{\pm} = \pm a_0 \implies \partial_t \alpha_{\pm} + \lambda_{\pm} \partial_x \alpha_{\pm} = 0 \quad \text{où} \quad \alpha_{\pm} = p \pm \rho_0 a_0 v$$

- $\alpha_{\pm}$ invariants de Riemann (ou variables caractéristiques) du système

Acoustique linéaire : pulse initial en pression et une vitesse nulle

Figure : Apparition de deux ondes acoustiques

Lien entre l'acoustique linéaire et l'équation des ondes ?

$$\bullet \quad \partial_t p + \rho_0 a_0^2 \partial_x v = 0 \quad \xRightarrow{\partial_t} \quad \partial_{tt} p + \rho_0 a_0^2 \partial_{xt} v = 0$$

$$\bullet \quad \partial_t v + \frac{1}{\rho_0} \partial_x p = 0 \quad \xRightarrow{\partial_x} \quad \partial_{tx} v + \frac{1}{\rho_0} \partial_{xx} p = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0}$$

- **Équation des ondes** avec a_0 vitesse du son dans le matériau

Conclusion

- Problème hyperbolique : combinaison de propagation d'ondes simples

EDP scalaires d'ordre 1 en dimension quelconque $d = p + 1$

- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^t \in \mathbb{R}^p$ ainsi que $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p)^t \in \mathbb{R}^p$
- Une EDP scalaire d'ordre 1 à coefficients réels est toujours hyperbolique

• Exemple :

$$\begin{cases} \partial_t u(\mathbf{x}, t) + c_1 \partial_{x_1} u(\mathbf{x}, t) + \dots + c_p \partial_{x_p} u(\mathbf{x}, t) = 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \frac{d u(\mathbf{x} + \mathbf{c} t, t)}{dt} = 0 \iff u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{c} t)$$

Systèmes d'EDP d'ordre 1 en dimension quelconque $d = p + 1$

- On considère un système d'EDP d'ordre 1, avec $\{A_j\}_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + A_1 \partial_{x_1} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \dots + A_p \partial_{x_p} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$$

- Pour $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_p)^t \in \mathbb{R}^p$, on définit $A(\mathbf{n}) = A_1 n_1 + \dots + A_p n_p$
- Si, $\forall \mathbf{n}$ vecteur unité, *i.e.* $\|\mathbf{n}\|_2 = 1$, la matrice $A(\mathbf{n})$ est diagonalisable à valeurs propres réelles, le système est alors hyperbolique

Définition alternative pour les EDP linéaires

- Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^t \in \mathbb{R}^d$ et un opérateur $L(\mathbf{x}, D) = \sum_{|j| \leq m} a_j(\mathbf{x}) D^j$ où

$$D^j = \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \cdots \frac{\partial^{j_d}}{\partial x_d^{j_d}} \quad \text{et} \quad \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_d)^t \in \mathbb{N}^d$$

- L'équation aux dérivées partielles est alors définie comme

$$L(\mathbf{x}, D) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

où la fonction f est le second membre pour une EDP non-homogène

Symbole et symbole principal d'un opérateur

- On définit le symbole $S(\mathbf{x}, \xi)$ de l'opérateur $L(\mathbf{x}, D)$ comme le polynôme

$$S(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{|j| \leq m} a_j(\mathbf{x}) \xi^j \quad \text{avec} \quad \xi^j = \xi_1^{j_1} \cdots \xi_d^{j_d}$$

- Le symbole principal est alors le polynôme $S_p(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{|j|=m} a_j(\mathbf{x}) \xi^j$

Exemples

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

- $$-2u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1 x_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} = f(\mathbf{x})$$

- $$\Delta u + 2\mathbf{x} \cdot \nabla u - u = g(\mathbf{x})$$

Exemples

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} + 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$

- $-2u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1 x_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} = f(\mathbf{x})$

- $\Delta u + 2\mathbf{x} \cdot \nabla u - u = g(\mathbf{x})$

Exemples

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} + 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$
$$\hookrightarrow S(\xi) = \xi_t^2 - \xi_y + 4 \xi_x^2 + \xi_x \xi_y \quad \text{où} \quad \xi = (\xi_t, \xi_x, \xi_y)^t$$

- $$-2u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1 x_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} = f(\mathbf{x})$$

- $$\Delta u + 2\mathbf{x} \cdot \nabla u - u = g(\mathbf{x})$$

Exemples

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} + 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$\hookrightarrow S(\xi) = \xi_t^2 - \xi_y + 4 \xi_x^2 + \xi_x \xi_y \quad \text{où} \quad \xi = (\xi_t, \xi_x, \xi_y)^t$$

$$\hookrightarrow S_p(\xi) = \xi_t^2 + 4 \xi_x^2 + \xi_x \xi_y$$

- $$-2u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1 x_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} = f(\mathbf{x})$$

- $$\Delta u + 2 \mathbf{x} \cdot \nabla u - u = g(\mathbf{x})$$

Exemples

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} + 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$\hookrightarrow S(\xi) = \xi_t^2 - \xi_y + 4 \xi_x^2 + \xi_x \xi_y \quad \text{où} \quad \xi = (\xi_t, \xi_x, \xi_y)^t$$

$$\hookrightarrow S_p(\xi) = \xi_t^2 + 4 \xi_x^2 + \xi_x \xi_y$$

$$\bullet \quad -2u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1 x_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} = f(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad L = -2I_d + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1 x_2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

$$\hookrightarrow S(\mathbf{x}, \xi) = -2 + \xi_1^2 + x_1 x_2 \xi_1^2 \xi_2 \quad \text{où} \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)^t$$

$$\hookrightarrow S_p(\mathbf{x}, \xi) = x_1 x_2 \xi_1^2 \xi_2$$

$$\bullet \quad \Delta u + 2\mathbf{x} \cdot \nabla u - u = g(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad L = \Delta + 2\mathbf{x} \cdot \nabla - I_d$$

$$\hookrightarrow S(\mathbf{x}, \xi) = \xi \cdot \xi + 2\mathbf{x} \cdot \xi - 1$$

$$\hookrightarrow S_p(\xi) = \xi \cdot \xi$$

EDP scalaires d'ordre 2

- On considère une EDP d'ordre 2 dont l'opérateur est défini par

$$L u = \sum_{1 \leq i \leq j \leq d} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u.$$

- On définit la matrice symétrique A tel que

$$A_{ij} = a_{ij},$$

$$A_{ij} = \frac{a_{ij}}{2} \quad \text{et} \quad A_{ji} = \frac{a_{ij}}{2}.$$

- Le symbole de l'opérateur s'écrit alors

$$S(\xi) = A \xi \cdot \xi + \mathbf{B} \cdot \xi + c,$$

$$\text{où } \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)^t \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = (b_1, b_2, \dots, b_d)^t.$$

Remarque sur la terminologie pour $m = 2$ et $d = 2$

- Poisson : $L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \longrightarrow S(\xi) = \xi_x^2 + \xi_y^2$

$$\hookrightarrow S(\xi) = \alpha \iff \xi_y = \pm \sqrt{\alpha - \xi_x^2}$$

Définition d'une ellipse

- Ondes : $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \longrightarrow S(\xi) = \xi_t^2 - c^2 \xi_x^2$

$$\hookrightarrow S(\xi) = \alpha \iff \xi_t = \pm \sqrt{\alpha + c^2 \xi_x^2}$$

Définition d'une hyperbole

- Chaleur : $L = \frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \longrightarrow S(\xi) = \xi_t - \nu \xi_x^2$

$$\hookrightarrow S(\xi) = \alpha \iff \xi_t = \alpha + \nu \xi_x^2$$

Définition d'une parabole

Définition

- L'opérateur est dit **hyperbolique**, **elliptique** ou **parabolique** suivant que les solutions de l'équation

$$S(\xi) = \alpha$$

forment respectivement des hyperboloïdes, ellipsoïdes ou paraboloides

Remarque

- La matrice A étant symétrique, il suffit de la diagonaliser pour avoir la forme des solutions de l'équation précédente

Théorème : EDP scalaires d'ordre 2

- L'opérateur sera alors :
 - **Elliptique** si les valeurs propres de A sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives
 - **Parabolique** si les valeurs propres de A sont toutes strictement positives ou strictement négatives sauf une nulle
 - **Hyperbolique** si les valeurs propres de A sont toutes strictement positives sauf une négative, ou inversement

Cas particulier pour $d = 2$

(cas bi-dimensionnel)

$$\bullet \quad Lu = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u + g$$

$$\bullet \quad S_p(\xi) = a\xi_x^2 + b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}$$

• A est symétrique, donc diagonalisable à valeurs propres λ_1 et λ_2 réelles

- $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \implies$
- si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \iff \det A > 0$
 - si $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0 \iff \det A = 0$
 - si λ_1 et λ_2 de signe opposé $\iff \det A < 0$

Théorème : EDP scalaires d'ordre 2 pour $d = 2$

$$\bullet \quad Lu = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u + g$$

- Alors si
- | | | |
|---|-----------------|---------------------|
| { | $b^2 - 4ac < 0$ | Elliptique |
| | $b^2 - 4ac = 0$ | Parabolique |
| | $b^2 - 4ac > 0$ | Hyperbolique |

Exemples de schémas numériques

- Différences finies
 - Volumes finis
 - Éléments finis
 - Galerkin discontinu
 - Méthode HHO
- } semestre 1 (**HAX703X**)
- semestre 2 (**HAX804X**)
- } semestre 3 (**HAX905X**)

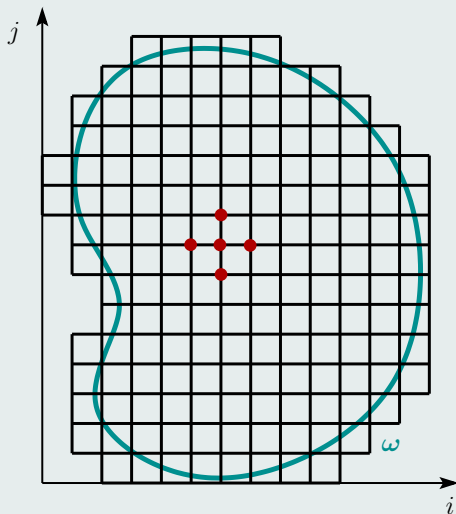
Recherche d'une solution approchée

- 1 Discrétisation du domaine de définition (grille ou maillage)
- 2 Approximation de l'EDP (approximation des opérateurs, restriction de l'espace des solutions à un espace de dimension finie, ...)
- 3 Obtention d'une solution approchée

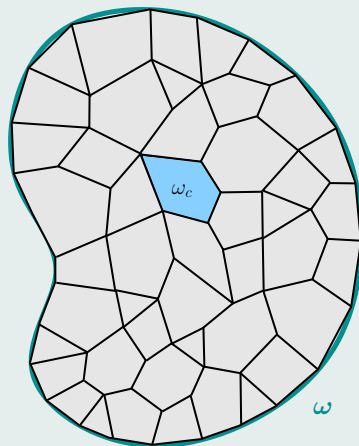
Remarque fondamentale

- 1 **On souhaite que lorsque la distance entre les points de discrétisation tend vers zéro, la solution approchée converge vers la solution exacte du problème étudié**

Exemples de discrétisation du domaine de définition



(a) Grille cartésienne



(b) Maillage déstructuré