Chapitre 3

Résolution analytique des lois de conservation scalaires

François Vilar

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier

1 Introduction

2 Solutions fortes

3 Solutions faibles

4 Non-unicité des solutions faibles

5 Solutions faibles entropiques

6 Problème de Riemann

7 Exemple : Trafic routier

Définition

- Lois de Conservation Scalaires (LCS) :

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x f\big(u(x,t)\big) = 0, \tag{1}$$

où $u(x,t)$ est la solution et $f(u)$ la fonction flux

- Équation type des EDP hyperboliques

Pourquoi conservation ?

- Soit un volume de contrôle $\mathrm{I} = [a,\, b]$

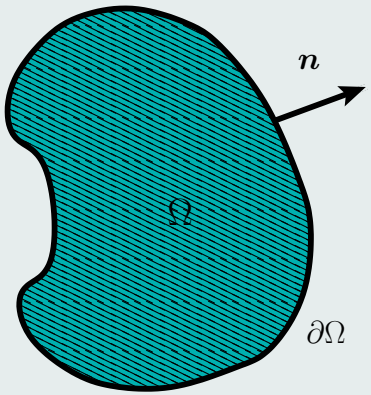
$$\int_{\mathrm{I}} (1) : \qquad \int_{\mathrm{I}} \partial_t u \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathrm{I}} \partial_x f(u)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{I}} u\,\mathrm{d}x = f(u)_{|a} - f(u)_{|b}$$

- **L'évolution temporelle de l'intégrale de u est dictée par ce qui rentre dans I moins ce qu'il en sort, et ceci en terme de flux**

Conservation multidimensionnelle

- $\partial_t u(\boldsymbol{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{F}\big(u(\boldsymbol{x}, t)\big) = 0$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_\Omega u \,\mathrm{d}V = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}(u) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S$

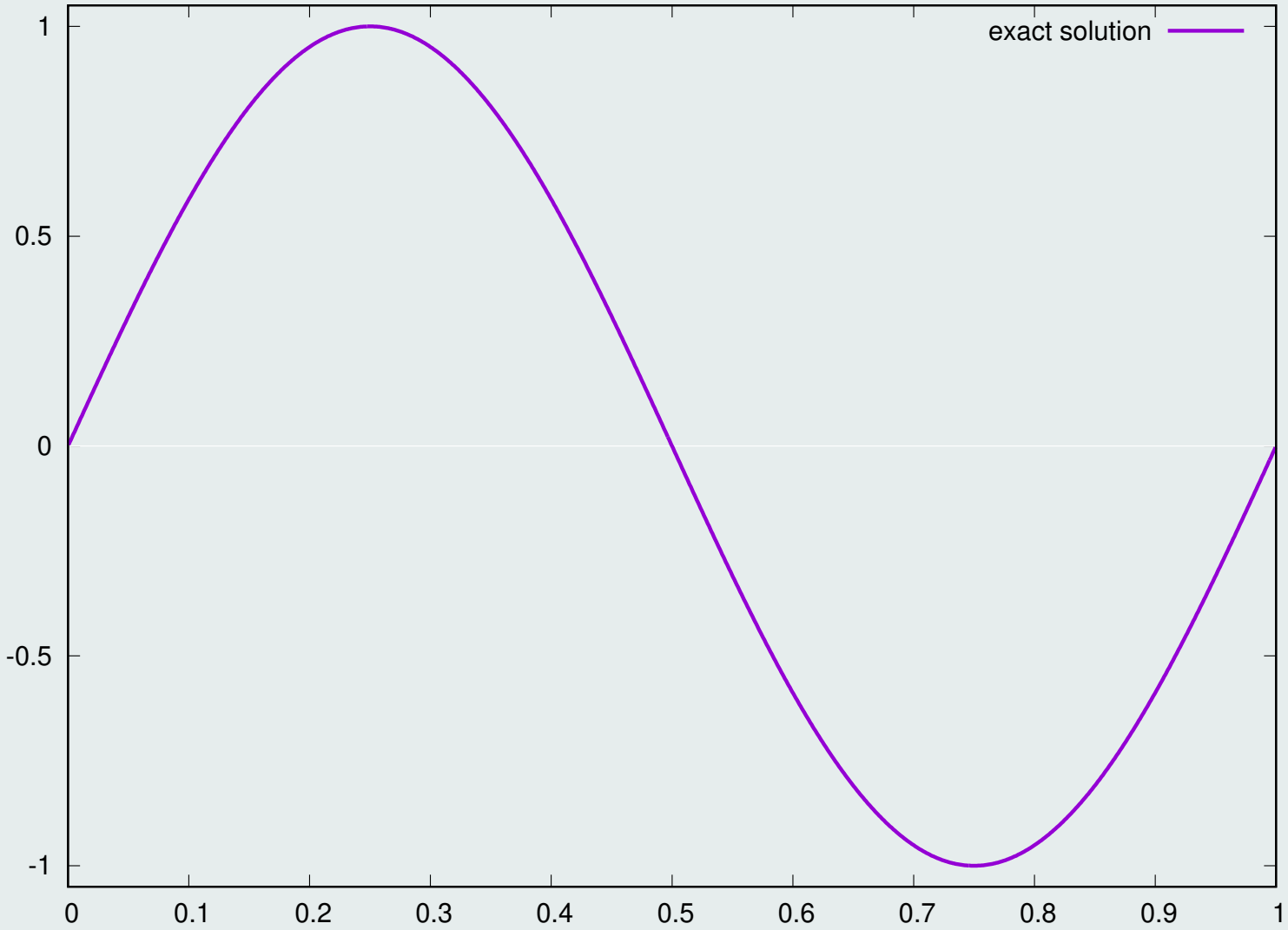


Difficulté fondamentale des EDP hyperboliques

- **Même en considérant une fonction flux $f(\cdot)$ et une donnée initiale $u(\cdot, 0)$ très régulières (par exemple $\mathcal{C}^\infty$), la solution peut devenir discontinue en temps fini**
- Exemple standard : <u>équation de Burgers</u>

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x\big(\frac{1}{2}u^2\big) = 0, & (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \sin(2\pi x), & x \in [0,1]\,. \end{cases}$$

Apparition d'une discontinuité en temps fini



Problème de Cauchy

- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (\mathrm{C})$$

  avec $f \in \mathcal{C}^2$ et $u_0 \in \mathcal{C}^1$

Définition : solution forte

On dit que $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution forte de (C) si :

- $u \in \mathcal{C}^1$
- u satisfait l'équation en tout point

Comment obtenir une telle solution ?

- Idée : se ramener à une EDO qu'on saurait résoudre

$$\Longrightarrow \quad \textbf{Méthode des caractéristiques}$$

Forme non-conservative

- $\partial_t u + f'(u)\,\partial_x u = 0$ Solution régulière

Question

- Existe-t-il une courbe $x(t)$ sur laquelle la solution u est conservée ?

Variation temporelle le long d'une courbe

- Soit la courbe $x(X,t)$ telle que $x(X,0) = X$
- La variation temporelle de la solution le long de cette courbe s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u\big(x(X,t),t\big) = \frac{\partial}{\partial t} u\big(x(X,t),t\big) + \frac{\partial\, x(X,t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial x} u\big(x(X,t),t\big)$$

Courbe caractéristique

- $\begin{cases} \dfrac{\partial\, x(X,t)}{\partial t} = f'\Big(u\big(x(X,t),t\big)\Big), \\ x(X,0) = X. \end{cases}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u\big(x(X,t),t\big) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \Longrightarrow \quad u\big(x(X,t),t\big) = u_0(X), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

Solution forte

- $u\big(x(X,t),t\big) = u_0(X), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$
- $x(X,t) = a\big(u_0(X)\big)\, t + X \quad$ avec $\; a(u) = f'(u)$

Remarque

- On connaît l'expression de x en fonction de X et t
- Si on trouve la fonction réciproque $X(x,t)$, alors la solution forte s'écrit

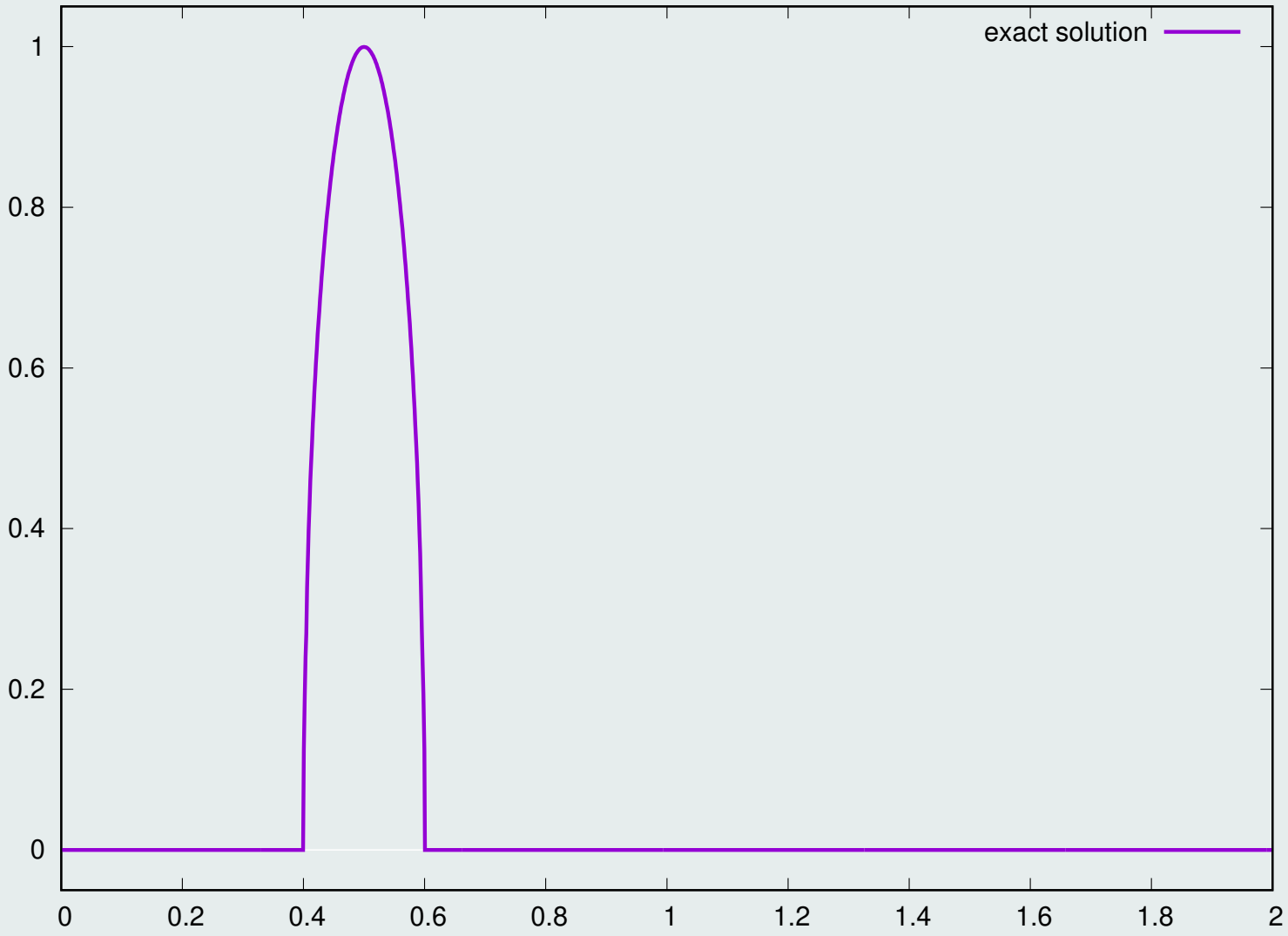
$$u(x,t) = u_0\big(X(x,t)\big)$$

Exemple : advection linéaire

- $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0, \qquad c \in \mathbb{R}$ la vitesse de transport
- $f(u) = c\,u \quad \Longrightarrow \quad a(u) = c$
- $x(X,t) = c\,t + X \quad \Longleftrightarrow \quad X(x,t) = x - c\,t$
- La solution forte s'écrit donc :

$$u(x,t) = u_0(x - c\,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

Équation de transport : $c = 1$



Cas général

- Il est très difficile de trouver la fonction réciproque $X(x,t)$
- On peut utiliser une méthode de résolution numérique de l'équation

$$g(X) = 0 \qquad \text{avec} \qquad g(X) = a\big(u_0(X)\big)\, t + X - x,$$

pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ donné

Exemple : méthode de Newton

- $X_0 = x$
- $X_{n+1} = X_n - \dfrac{g(X_n)}{g'(X_n)}$
- Si $|X_{n+1} - X_n| \leq tol$ alors $X = X_{n+1}$

Remarque : Hypothèse cruciale

- L'existence de la solution forte repose sur l'hypothèse qu'en tout point $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, il n'y a qu'**une seule** caractéristique qui y passe

Exemple : Burgers

- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0, \\ 1-x, & \text{si } x \in [0,1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$
- $f(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad \Longrightarrow \quad a(u) = u$
- $x(X,t) = u_0(X)\,t + X$

$$= \begin{cases} t + X, & \text{si } X \leq 0, \\ (1-X)\,t + X, & \text{si } X \in [0,1], \\ X, & \text{si } X \geq 1. \end{cases}$$

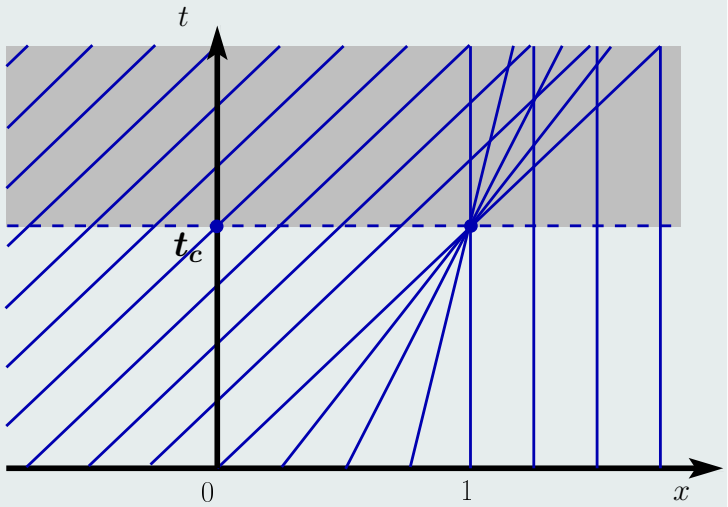


Figure : Courbes caractéristiques dans le plan (x,t)

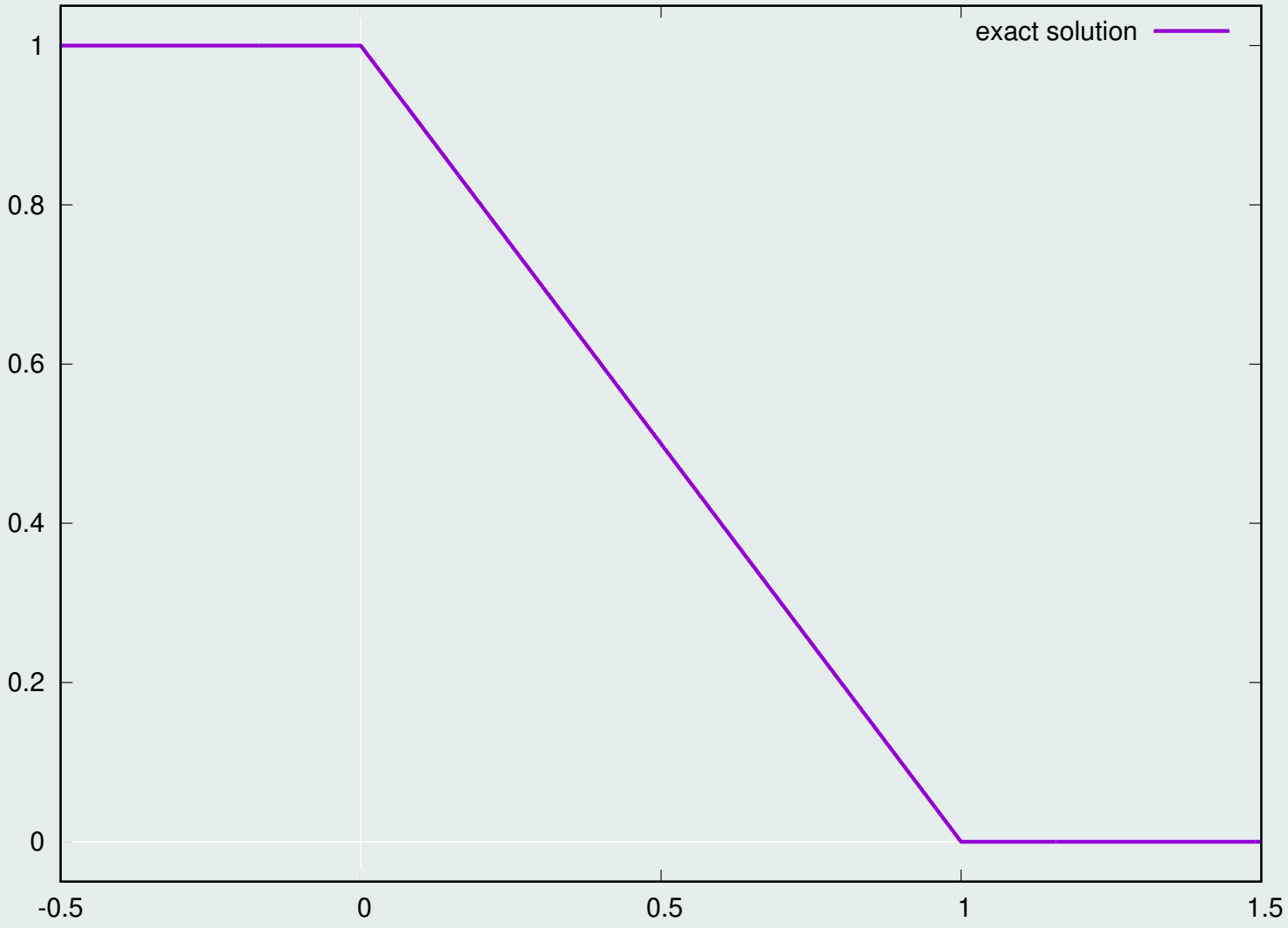
Solution forte **(à faire en cours)**

- Par la méthode des caractéristiques, on peut obtenir la solution forte :

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq t, \\ \dfrac{1-x}{1-t}, & \text{si } x \in [t,1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, t_c[$$

- t_c est le temps critique où les caractéristiques de croisent

Équation de Burgers : solution forte



Théorème

On suppose que :

- $f \in \mathcal{C}^2$ et $u_0 \in \mathcal{C}^1$,
- la borne inférieure $D = \inf_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, a\big(u_0(x)\big) \right)$ est réelle,

alors en posant

- $t_c = \begin{cases} +\infty & \text{si } D \geq 0 \\ -\frac{1}{D} & \text{si } D < 0 \end{cases}$

le problème de Cauchy admet une solution unique $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0, t_c[$

Exemple : Burgers

- $f(u) = \frac{1}{2}\, u^2$ avec $u_0(x) = \sin(2\pi x)$
- $a\big(u_0(x)\big) = \sin(2\pi x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, a\big(u_0(x)\big) = 2\pi\, \cos(2\pi x)$
- $D = -2\pi \;<\; 0 \quad \Longrightarrow \quad t_c = \dfrac{1}{2\pi} \simeq 0.1592$

Remarque

- La théorie des solutions fortes $(u \in \mathcal{C}^1)$ s'étend aux fonction **continues et continûment dérivables par morceaux** ($\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux)
- L'équation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ est vérifiée partout sauf sur les lignes de perte de régularité $\mathcal{C}^1$
- Sur ces même lignes, l'équation est vraie séparément de part et d'autre

Théorème

Soit $a_0(x) = a\big(u_0(x)\big)$. On suppose que :

- $a_0 \in \mathcal{C}^0 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et dérivable par morceaux
- a_0 admet en tout point une dérivée à gauche et à droite :

$$D \leq a_0'(x^\pm) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors en posant

- $t_c = \begin{cases} +\infty & \text{si } D \geq 0 \\ -\frac{1}{D} & \text{si } D < 0 \end{cases}$

le problème de Cauchy admet une solution unique sur $\mathbb{R} \times [0, t_c[$

Retour à l'exemple précédent

- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0, \\ 1-x, & \text{si } x \in [0,1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$
- $a_0(x) = u_0(x) \quad \Longrightarrow \quad a_0'(x^\pm) \geq -1, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- Le temps critique est donc $t_c = 1$
- Par la méthode des caractéristiques, on obtient la solution forte :

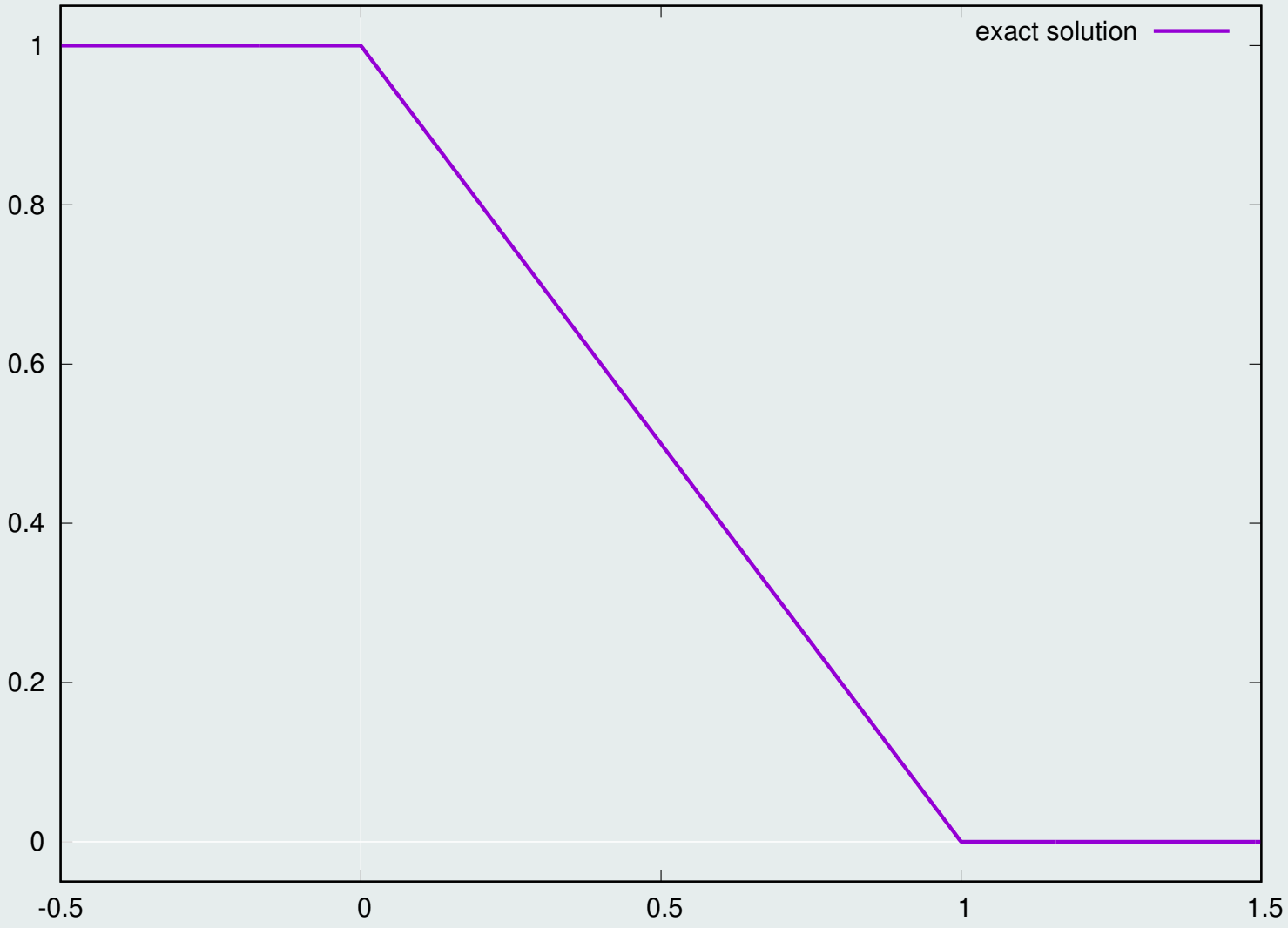
$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq t, \\ \dfrac{1-x}{1-t}, & \text{si } x \in [t,1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1[$$

Question

- Que se passe-t-il après l'instant t_c ?
- Existe-t-il une solution après l'instant t_c ?
- Est-ce utile de connaître la solution après l'apparition de discontinuités ?

$\Longrightarrow$ **Problème essentiel, théorie des solutions faibles**

Équation de Burgers : solution faible



Rappel

- $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ à support compact

  Exemple : $\phi(x,t)=0$ si $t>T$ ou $|x|>A$

Remarque

- u solution forte de (C)
- $\phi\in\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$

$$-\int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\left(\partial_t u+\partial_x f(u)\right)\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0$$

$$\iff\quad \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\left(u\partial_t\phi+f(u)\partial_x\phi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_{\mathbb{R}}u_0(x)\,\phi(x,0)\,\mathrm{d}x=0 \qquad (\mathrm{F})$$

- Les dérivées ∂_t et ∂_x sont à présent portées par ϕ
- (F) a un sens dès que $u\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$

Définition : solution faible

- On dit que $u\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ est une solution faible de (C) si u vérifie (F) $\forall\phi\in\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$

Remarque

- u solution forte $\implies$ u solution faible
- u solution faible $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\implies$ u solution forte

Hypothèses

On considérera uniquement :

- Les solutions faibles $\mathcal{C}^1$ par morceaux
- Un nombre fini de discontinuité (*sauts*) dans l'espace (x, t)
- Chaque discontinuité Σ admet une paramétrisation $(\sigma(t), t)$ avec $\sigma(.)$ fonction $\mathcal{C}^1$
- On note $\boldsymbol{n}$ une normale de Σ définie comme $\boldsymbol{n} = (n_x, n_t)^{\mathrm{t}} = \big(-1, \sigma'(t)\big)^{\mathrm{t}}$
- Chaque solution u admet de part et d'autre de chaque courbe des limites notée u^- et u^+ solution fortes de (C)

Question

- Toutes les discontinuités sont-elles admissibles ?

Relation de Rankine-Hugoniot (R-H)

- La solution u vérifie la relation de *saut* suivante le long de Σ :

$$[f(u)] = \sigma'(t)\,[u],$$

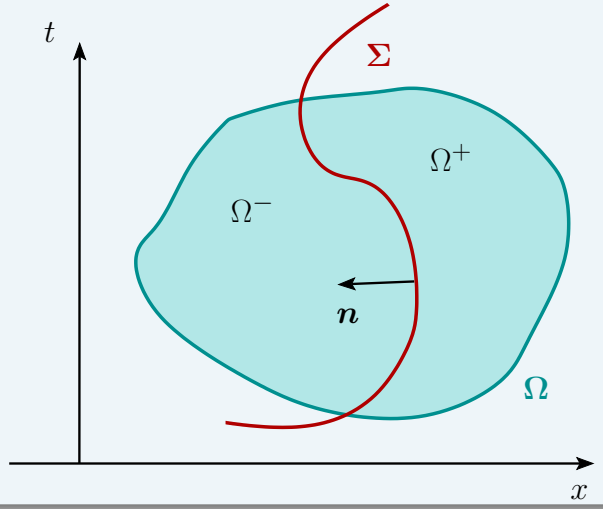
où $[\phi] = \phi^+ - \phi^-$

- Cette relation nous permet de définir la vitesse de propagation $S = \sigma'(t)$ des discontinuités admissibles comme :

$$S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$$

Preuve

- u solution faible et $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$
- $\displaystyle\int_\Omega \big(u\,\partial_t\phi + f(u)\,\partial_x\phi\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$
- $\displaystyle\int_{\Omega^-} \big(u\,\partial_t\phi + f(u)\,\partial_x\phi\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad + \int_{\Omega^+} \big(u\,\partial_t\phi + f(u)\,\partial_x\phi\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$



Preuve

- u est $\mathcal{C}^1$ sur Ω^- et Ω^+
- $$-\int_{\Omega^-}\big(\partial_t u+\partial_x f(u)\big)\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \;+\; \int_{\partial\Omega^-\cap\boldsymbol{\Sigma}}\big(u^-\,\phi\,n_t^- + f(u^-)\,\phi\,n_x^-\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \;-$$
$$\int_{\Omega^+}\big(\partial_t u+\partial_x f(u)\big)\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \;+\; \int_{\partial\Omega^+\cap\boldsymbol{\Sigma}}\big(u^+\,\phi\,n_t^+ + f(u^+)\,\phi\,n_x^+\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \;=\; 0$$
- u est solution forte sur Ω^- et Ω^+
- $\boldsymbol{n}\equiv\boldsymbol{n}^+=-\boldsymbol{n}^-$ et $\boldsymbol{n}=\big(-1,\sigma'(t)\big)$
- $$\int_{\partial\Omega^+\cap\boldsymbol{\Sigma}}\big((u^+-u^-)\,n_t+(f(u^+)-f(u^-))\,n_x\big)\,\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \;=\; 0, \qquad \forall\phi\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)$$
- $$(u^+-u^-)\,n_t+(f(u^+)-f(u^-))\,n_x=0$$
- $$f(u^+)-f(u^-)=\sigma'(t)\,(u^+-u^-)$$

Retour à l'exemple précédent

- $\lim_{t\to 1} u(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1, \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$
- $S = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = \dfrac{1}{2}$ Rankine-Hugoniot
- Pour $t \geq 1$, le choc se propage à la vitesse $\frac{1}{2}$
- $x_c(t) = 1 + \dfrac{t-1}{2} = \dfrac{1+t}{2}$ Courbe du choc
- $u(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \frac{1+t}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{1+t}{2} \end{cases}, \quad \forall t \geq 1.$

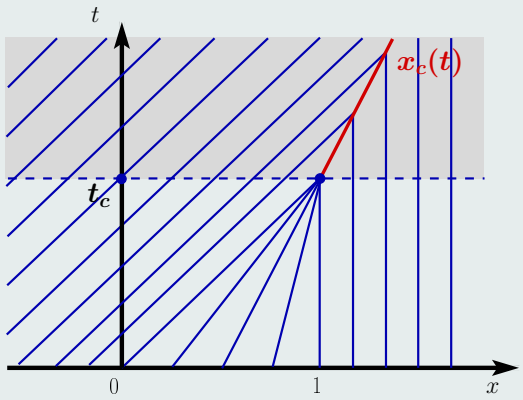


Fig. : Courbes caractéristiques

Question

- Si (C) admet une solution forte, cette solution est **unique**
- Qu'en est-il des solutions faibles ?

Non-unicité des solutions faibles - Exemple

- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$
- $f(u) = \frac{1}{2}\,u^2 \quad \Longrightarrow \quad a(u) = u$
- $x(X,t) = \begin{cases} X, & \text{si } X < 0, \\ t + X, & \text{si } X > 0. \end{cases}$

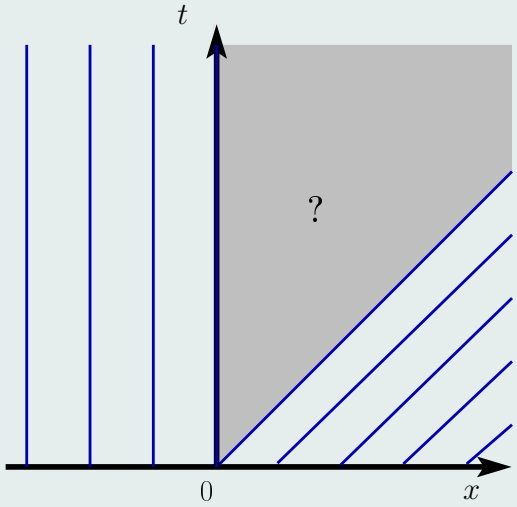


Figure : Courbes caractéristiques

Solution discontinue

- $S = \dfrac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} = \dfrac{1}{2}$ [R-H]
- $u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{1}{2}\,t \\ 1, & \text{si } x > \frac{1}{2}\,t \end{cases}$
- *Choc de détente*

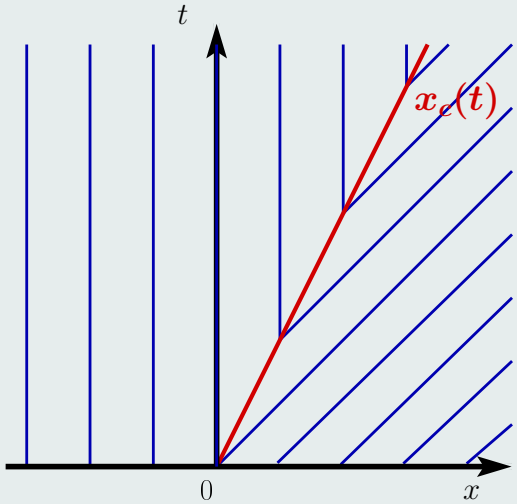
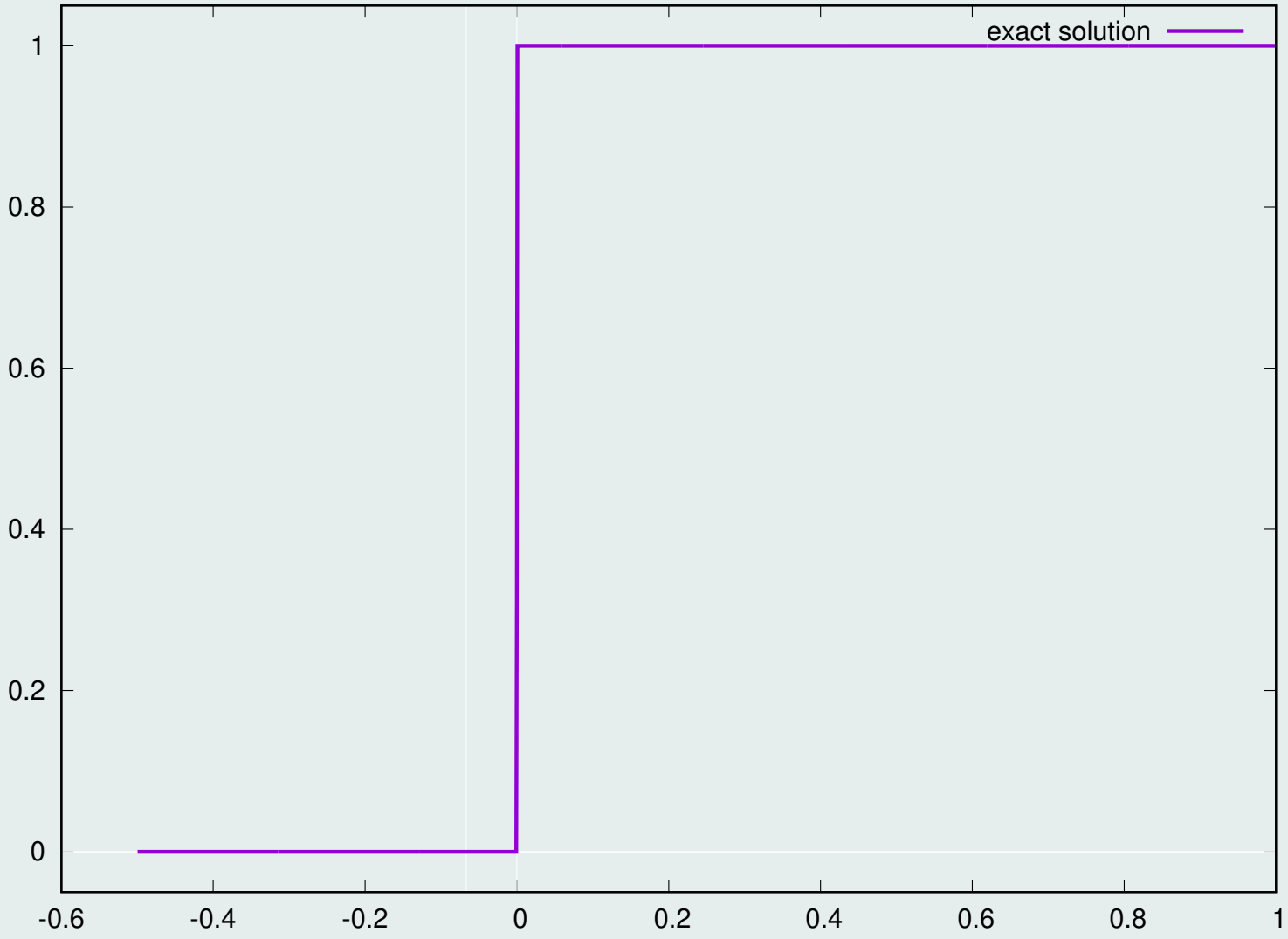


Figure : Courbes caractéristiques

Solution faible discontinue



Solution faible régulière

- $\begin{cases} \dfrac{\partial x(X,t)}{\partial t} = a\Big(u\big(x(X,t),t\big)\Big) \\ x(X,0) = X. \end{cases}$
- $u\big(x(X,t),t\big) = a^{-1}\Big(\dfrac{\partial x(X,t)}{\partial t}\Big)$
- $a(u) = u \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial x(0,t)}{\partial t} = \xi = \dfrac{x}{t}$
- $u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{t}, & \text{si } x \in [0,t], \\ 1, & \text{si } x \geq t. \end{cases}$

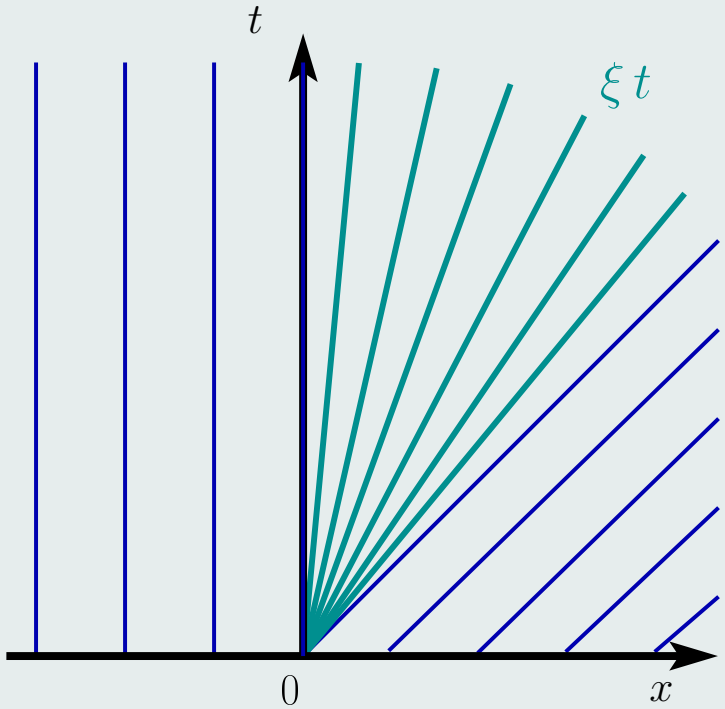
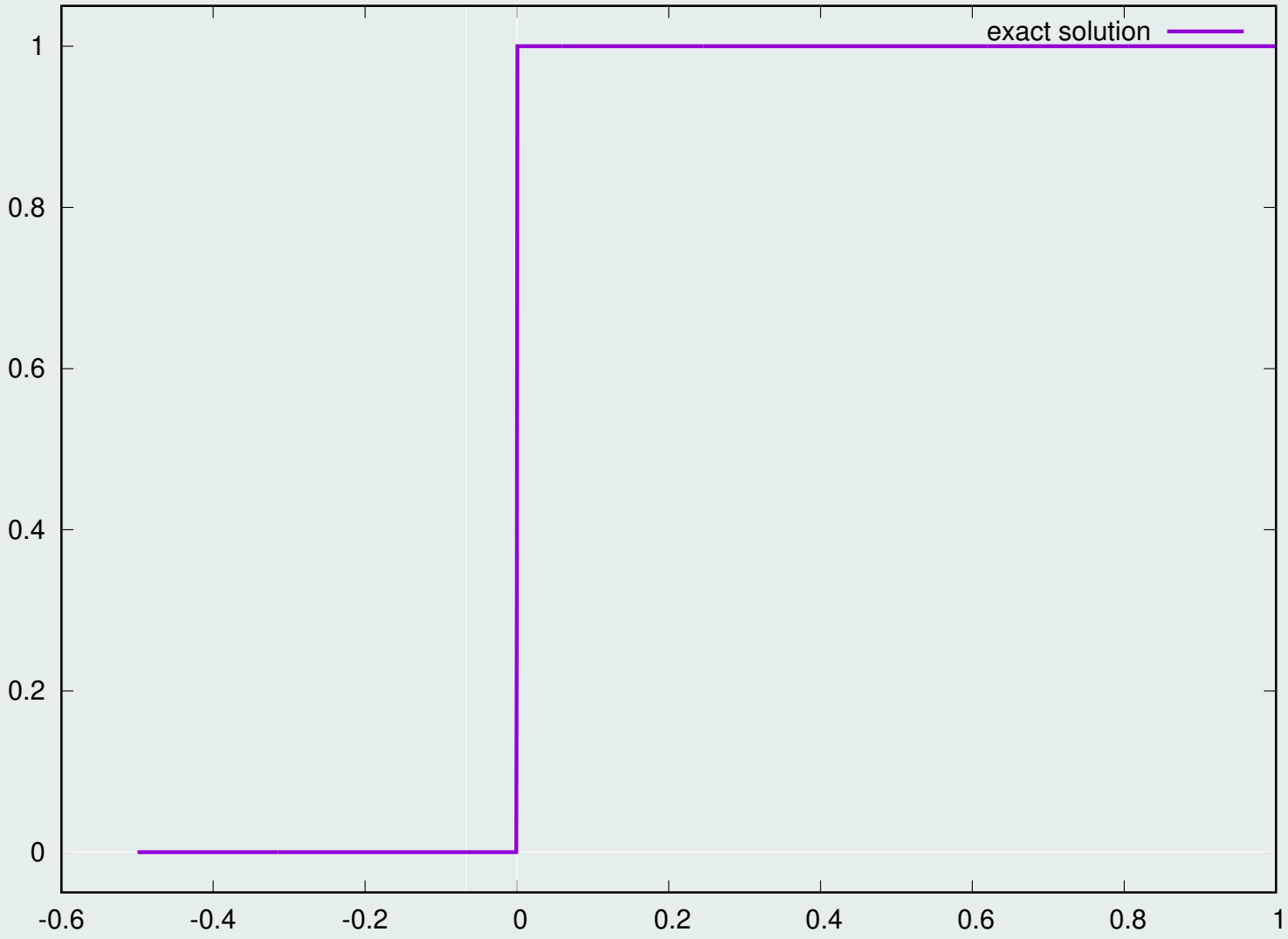


Figure : Courbes caractéristiques

Remarque

- On a trouvé deux solutions faibles pour ce problème
- Certains problèmes admettent une infinité de solutions faibles
- Peut-on trouver un critère permettant de sélectionner la *bonne* solution ?

Solution faible régulière



Second principe de la thermodynamique

- L'entropie d'un système ne fait que croître
- Transformation réversible : $\Delta S = 0$
- Transformation irréversible : $\Delta S > 0$

Définition

- Une fonction strictement convexe $\eta \in \mathcal{C}^2$ est une entropie de l'équation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ ssi $\exists\, \psi \in \mathcal{C}^1$ appelé flux d'entropie tel que si u est une solution forte alors u satisfait aussi la loi de conservation

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) = 0$$

Cas scalaire

- Toute fonction $\eta \in \mathcal{C}^2$ strictement convexe est une entropie car il suffit de choisir ψ tel que $\psi'(u) = \eta'(u)\, f'(u)$

$$\eta'(u)\left(\partial_t u + \partial_x f(u)\right) \;=\; \partial_t \eta(u) + \eta'(u)\, f'(u) \partial_x u \;=\; \partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) \;=\; 0$$

Définition

- Une solution faible u de (C) est dite entropique ssi, $\forall$ entropie η associée à ψ, u satisfait l'inégalité d'entropie suivante

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \big(\eta(u)\partial_t\phi + \psi(u)\partial_x\phi\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq 0, \qquad \forall\,\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$$

- On note généralement que $\partial_t\eta(u) + \partial_x\psi(u) \leq 0$ en formulation faible

Explications

- Dans la physique des milieux continus, il n'y a pas de discontinuité des variables thermodynamiques
- Il y a toujours un terme de viscosité, aussi petit soit-il (exemple : viscosité de l'air sur les vagues)
- Considérons l'équation $\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon\,\partial_{xx}u^\varepsilon \quad (\mathcal{V}^\varepsilon)$
- La viscosité régularise (lisse) la solution
- Une solution faible u sera entropique si elle est la limite d'une solution visqueuse u^ε quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

Preuve

- $\eta'(u^\varepsilon) \times \left(\mathcal{V}^\varepsilon\right)$: $\quad \partial_t \eta(u^\varepsilon) + \partial_x \psi(u^\varepsilon) = \varepsilon\, \eta'(u^\varepsilon)\, \partial_{xx} u^\varepsilon$
$$= \varepsilon\, \partial_{xx}\eta(u^\varepsilon) - \varepsilon\, \eta''(u^\varepsilon)\left(\partial_x u^\varepsilon\right)^2$$
- $\eta(\cdot)$ est strictement convexe $\quad \Longrightarrow \quad \eta''(u^\varepsilon) > 0$
- $\partial_t \eta(u^\varepsilon) + \partial_x \psi(u^\varepsilon) \leq \varepsilon\, \partial_{xx}\eta(u^\varepsilon)$
- Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient $\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) \leq 0$ en formulation faible

Théorème

- On suppose que $f \in \mathcal{C}^2$ et que $u_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$
- Alors le problème de Cauchy (C) admet une unique solution faible entropique bornée dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- De plus, cette solution vérifie le principe du maximum

Principe du maximum

- Si $\quad \alpha \leq u_0(x) \leq \beta \quad$ presque partout dans $\mathbb{R}$
- Alors $\forall t > 0, \quad \alpha \leq u(x,t) \leq \beta \quad$ presque partout dans $\mathbb{R}$

Lemme

- Soit u une solution faible $\mathcal{C}^1$ par morceaux de (C)
- Alors u est l'unique solution entropique ssi

$$\psi(u^+) - \psi(u^-) \leq S\,\left(\eta(u^+) - \eta(u^-)\right)$$

- En tout point de chaque courbe de discontinuité
- Pour tout couple $(\eta,\,\psi)$ entropie - flux d'entropie

Preuve

- Même démo que pour [R-H] en partant de l'inégalité d'entropie

$$\int\!\!\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \left(\eta(u)\partial_t\phi + \psi(u)\partial_x\phi\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq 0, \qquad \forall\,\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$$

Proposition

- Soit un flux $f \in \mathcal{C}^2$ strictement convexe (*respectivement concave*)
- Alors, si u est la solution entropique, elle vérifie sur chaque discontinuité

$$u^- > u^+ \quad (\textit{respectivement}\ \ u^- < u^+)$$

Preuve

- Introduisons deux fonctions

$$g(u) = f(u) - f(u^+) - S\left(u - u^+\right) \quad \text{et} \quad H(u) = \psi(u) - S\,\eta(u)$$

- Par définition et selon Rankine-Hugoniot $\quad g(u^+) = g(u^-) = 0$
- D'après le lemme précédent, $\quad H(u^+) - H(u^-) \leq 0$
- $\displaystyle\int_{u^-}^{u^+} H'(v)\,\mathrm{d}v \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{u^-}^{u^+} \left(\psi'(v) - S\,\eta'(v)\right)\,\mathrm{d}v \leq 0$
- $\displaystyle\int_{u^-}^{u^+} \eta'(v)\,\left(f'(v) - S\right)\,\mathrm{d}v \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{u^-}^{u^+} \eta'(v)\,g'(v)\,\mathrm{d}v \leq 0$
- $\displaystyle -\int_{u^-}^{u^+} \eta''(v)\,g(v)\,\mathrm{d}v + \underbrace{\Big[\eta'(v)\,g(v)\Big]_{u^-}^{u^+}}_{=0} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{u^-}^{u^+} \underbrace{\eta''(v)}_{>0}\,g(v)\,\mathrm{d}v \geq 0$
- $g(u) = f(u) - f(u^+) - S\,(u - u^+) \quad \Longleftrightarrow \quad g''(u) = f''(u)$
- f est strict. convexe (*resp. concave*), donc $g''(u) > 0$ (*resp.* $g''(u) < 0$)

Preuve

- La fonction g est strictement convexe (*respectivement concave*)

$$g(u) = g\left((1-\theta)\,u^- + \theta\,u^+\right) \underbrace{<}_{\textit{resp.}\ >} (1-\theta)\,g(u^-) + \theta\,g(u^+) = 0$$

- Par conséquent, si f est strictement convexe $\Longrightarrow$ $u^- > u^+$

  si f est strictement concave $\Longrightarrow$ $u^- < u^+$

Remarque

- Comme $f \in \mathcal{C}^2$ et d'après la relation de Rankine-Hugoniot

$$S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} = f'(\gamma) \qquad \text{avec } \gamma \in \left]\min(u^-, u^+),\ \max(u^-, u^+)\right[$$

- Si $f \in \mathcal{C}^2$ strictement convexe $\Longrightarrow$ f' est strictement croissante

$$u^- > u^+ \quad \Longrightarrow \quad f'(u^-) > S > f'(u^+)$$

- Si $f \in \mathcal{C}^2$ strictement concave $\Longrightarrow$ f' est strictement décroissante

$$u^- < u^+ \quad \Longrightarrow \quad f'(u^-) > S > f'(u^+)$$

Condition d'entropie de Lax

- Si $f \in \mathcal{C}^2$ est strictement convexe ou concave, un choc est entropique ssi

$$a(u^-) > S > a(u^+),$$

où $S = \dfrac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$ la vitesse de propagation du choc

Remarques

- La vitesse de la discontinuité est supérieure à la vitesse de propagation en amont et inférieure à la vitesse en aval
- Les caractéristiques rentrent dans le choc
- Un choc entropique est un processus irréversible au cours duquel on perd de l'information. On ne peut pas savoir d'où vient la solution

Retour à l'exemple précédent : solution faible discontinue

- $u^- = 0$ et $u^+ = 1 \quad \Longrightarrow \quad a(u^-) = 0$ et $a(u^+) = 1$
- $S = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow$ Solution faible non-entropique

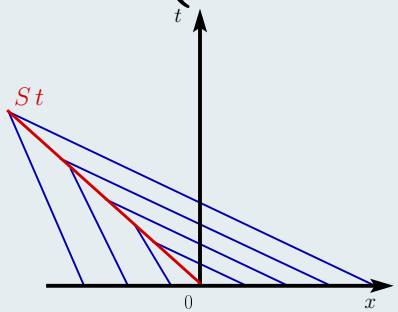
Problème de Riemann

- Problème de Cauchy avec une donnée initiale à deux états constants
- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \begin{cases} u^-, & \text{si } x < 0 \\ u^+, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

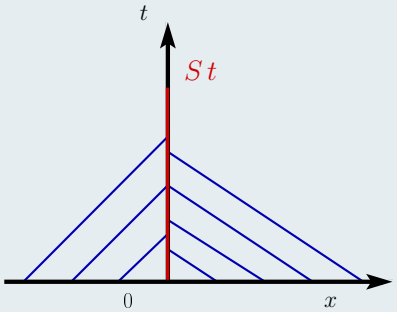
  où u^- et u^+ sont constantes données, et $f(\cdot) \in \mathcal{C}^2$

$f(\cdot)$ strictement convexe et $u^- > u^+$

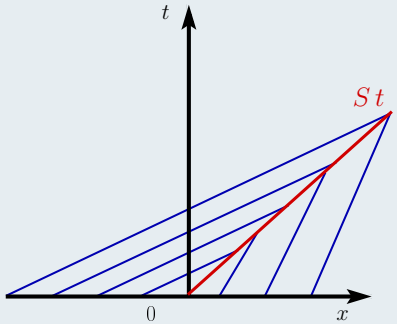
- $a(u^-) > a(u^+) \implies$ choc avec $S = \dfrac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$
- $u(x,t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < S, \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > S. \end{cases}$



(a) Choc à gauche



(b) Choc centré



(c) Choc à droite

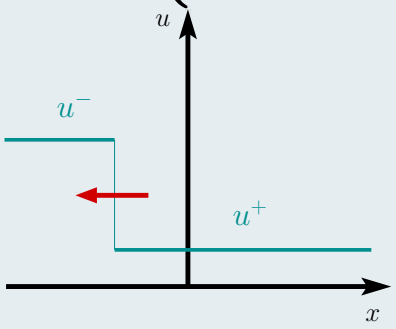
Problème de Riemann

- Problème de Cauchy avec une donnée initiale à deux états constants
- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \begin{cases} u^-, & \text{si } x < 0 \\ u^+, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

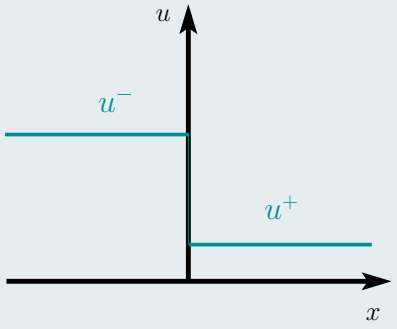
  où u^- et u^+ sont constantes données, et $f(\cdot) \in \mathcal{C}^2$

$f(\cdot)$ strictement convexe et $u^- > u^+$

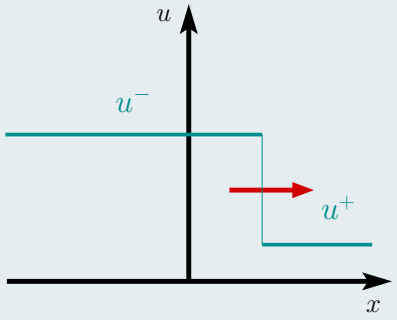
- $a(u^-) > a(u^+) \implies$ choc avec $S = \dfrac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$
- $u(x,t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < S, \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > S. \end{cases}$



(a) Choc à gauche



(b) Choc centré



(c) Choc à droite

Remarque : invariance par homothétie

- Soit $u(x,t)$ solution de l'équation $\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0$
- Soit le changement de variables $\tilde{x} = \lambda\, x$ et $\tilde{t} = \lambda\, t$
- Comme $\partial_x = \partial_x \tilde{x}\, \partial_{\tilde{x}} = \lambda\, \partial_{\tilde{x}}$ et $\partial_t = \partial_x \tilde{t}\, \partial_{\tilde{t}} = \lambda\, \partial_{\tilde{t}}$, on obtient

$$\partial_t u(\tilde{x},\tilde{t}) + \partial_x f(u(\tilde{x},\tilde{t})) = \lambda \left(\partial_{\tilde{t}} u(\tilde{x},\tilde{t}) + \partial_{\tilde{x}} f(u(\tilde{x},\tilde{t}))\right) = 0$$

- $u(\lambda\, x, \lambda\, t)$ est donc aussi solution de l'équation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$
- On va chercher des solutions de la forme $u(x,t) = v(\frac{x}{t})$

<u>Solutions auto-semblables ou auto-similaires</u>

$f(\cdot)$ strictement convexe et $u^+ > u^-$

- $a(u^+) > a(u^-) \quad \Longrightarrow \quad$ détente
- Soit la fonction $u(x,t) = v(\xi)$ avec $\xi = \frac{x}{t}$
- $\partial_t v(\xi) = v'(\xi)\, \partial_t \xi = -\frac{\xi}{t}\, v'(\xi)$ et $\partial_x v(\xi) = v'(\xi)\, \partial_x \xi = \frac{1}{t}\, v'(\xi)$
- $u(x,t)$ sera solution si $v'(\xi)\left(a(v) - \xi\right) = 0$
- En excluant la fonction constante $v'(\xi) = 0$, on obtient que $a(v) = \xi$

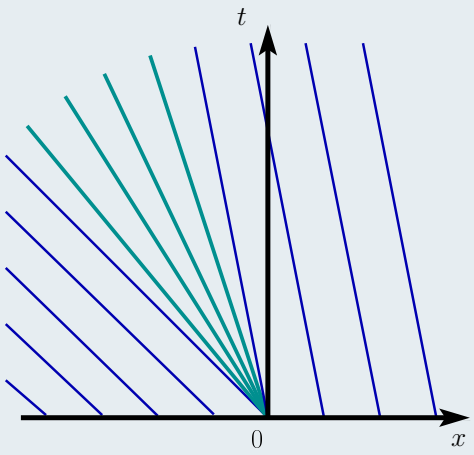
$f(\cdot)$ strictement convexe et $u^+ > u^-$

- Comme $a(\cdot)$ est strictement croissante, a réalise une bijection entre

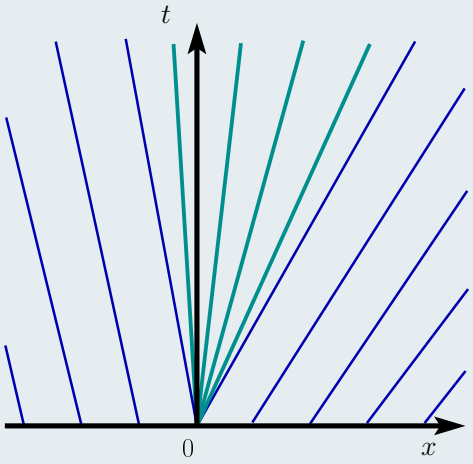
$$[u^-, u^+] \longleftrightarrow [a(u^-), a(u^+)]$$

- Donc $v(\xi) = a^{-1}(\xi)$ pour tout $\xi \in [a(u^-), a(u^+)]$

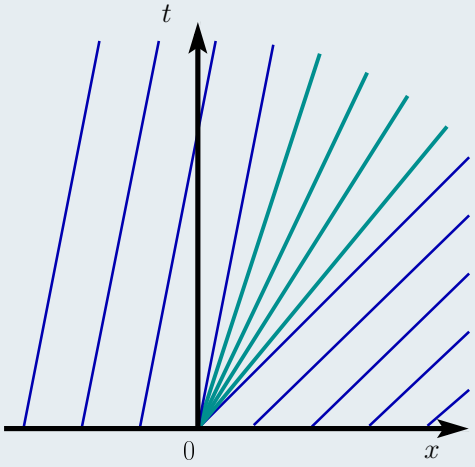
- $$u(x,t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < a(u^-), \\ a^{-1}(\frac{x}{t}), & \text{si } \frac{x}{t} \in [a(u^-), a(u^+)], \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > a(u^+). \end{cases}$$



(a) Détente à gauche



(b) Détente centré



(c) Détente à droite

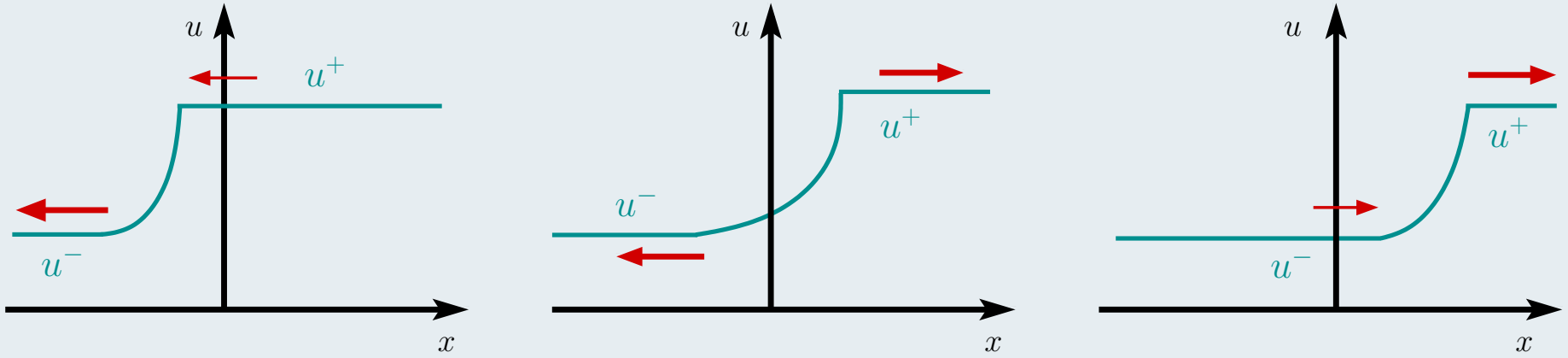
$f(\cdot)$ strictement convexe et $u^+ > u^-$

- Comme $a(\cdot)$ est strictement croissante, a réalise une bijection entre

$$[u^-, u^+] \longleftrightarrow [a(u^-), a(u^+)]$$

- Donc $v(\xi) = a^{-1}(\xi)$ pour tout $\xi \in [a(u^-), a(u^+)]$

- $$u(x,t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < a(u^-), \\ a^{-1}(\frac{x}{t}), & \text{si } \frac{x}{t} \in [a(u^-), a(u^+)], \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > a(u^+). \end{cases}$$



(a) Détente à gauche (b) Détente centré (c) Détente à droite

Conclusion

- On voit que dans tous les cas, l'unique solution entropique bornée du problème de Riemann ne dépend que de $\frac{x}{t}$, solution dite auto-semblable.

$$u(x,t) = \mathcal{W}\left(\frac{x}{t}; u^-, u^+\right)$$

Proposition

- L'unique solution entropique du problème de Riemann vérifie

$$\mathcal{W}\left(\frac{x}{t}; u^-, u^+\right) = \begin{cases} u^- & \text{si } \frac{x}{t} < \inf\limits_{u \in \mathrm{I}(u^-,u^+)} \Big(a(u)\Big) \\ u^+ & \text{si } \frac{x}{t} > \sup\limits_{u \in \mathrm{I}(u^-,u^+)} \Big(a(u)\Big) \end{cases}$$

où $\mathrm{I}(u^-, u^+) = \big[\min(u^-, u^+), \max(u^-, u^+)\big]$

Exemple : Trafic routier

- $\rho(x,t)$ la densité de véhicules le long d'une autoroute rectiligne et infinie
- $N(x_0, x_1, t) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \rho(x,t)\,\mathrm{d}x$ le nombre de voitures entre x_0 et x_1
- $v(x,t)$ la vitesse des véhicules
- $f(x,t) = \rho(x,t)\,v(x,t)$ facteur de perte ou de gain de véhicules
- On obtient alors l'équation de conservation suivante

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho\, v) = 0.$$

- Modèle LWR (Lighthill-Whitham-Richards) :

$$v(\rho) = u_{\max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right).$$

- $u_{\max} = 130$ et $\rho_{\max} = \frac{1}{\mathcal{L}}$ avec $\mathcal{L}$ la longueur moyenne des véhicules
- Version adimensionnée $u_{\max} = 1$ et $\rho_{\max} = 1$

$$\partial_t \rho + \partial_x\big(\rho\,(1-\rho)\big) = 0.$$

Trafic routier : problème simple

- $$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \big(\rho\,(1-\rho)\big) = 0, \\ \rho_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{8}, & \text{si } x \in]0,1[, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$
- $f(\rho) = \rho\,(1-\rho) \quad \Longrightarrow \quad a(\rho) = 1 - 2\,\rho$
- $x(X,t) = a(\rho_0(X))\,t + X$

$$= \begin{cases} X, & \text{si } X < 0, \\ \frac{3}{4}\,t + X, & \text{si } X \in]0,1[, \\ \frac{1}{2}\,t + X, & \text{si } X > 1. \end{cases}$$

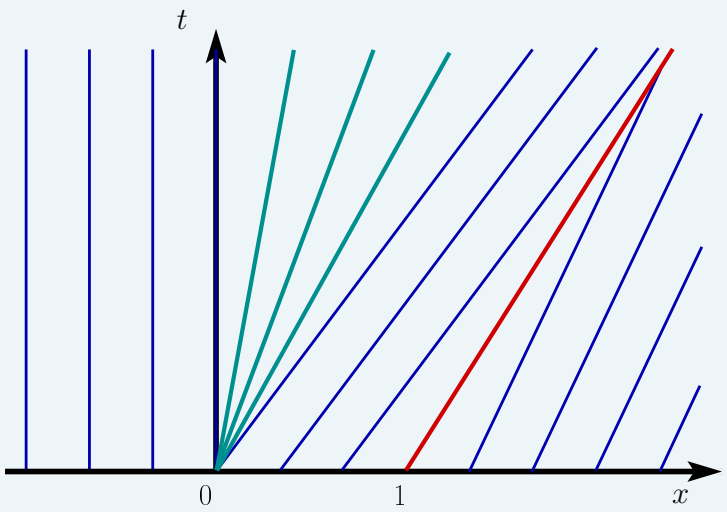


Figure : Courbes caractéristiques dans le plan (x,t)

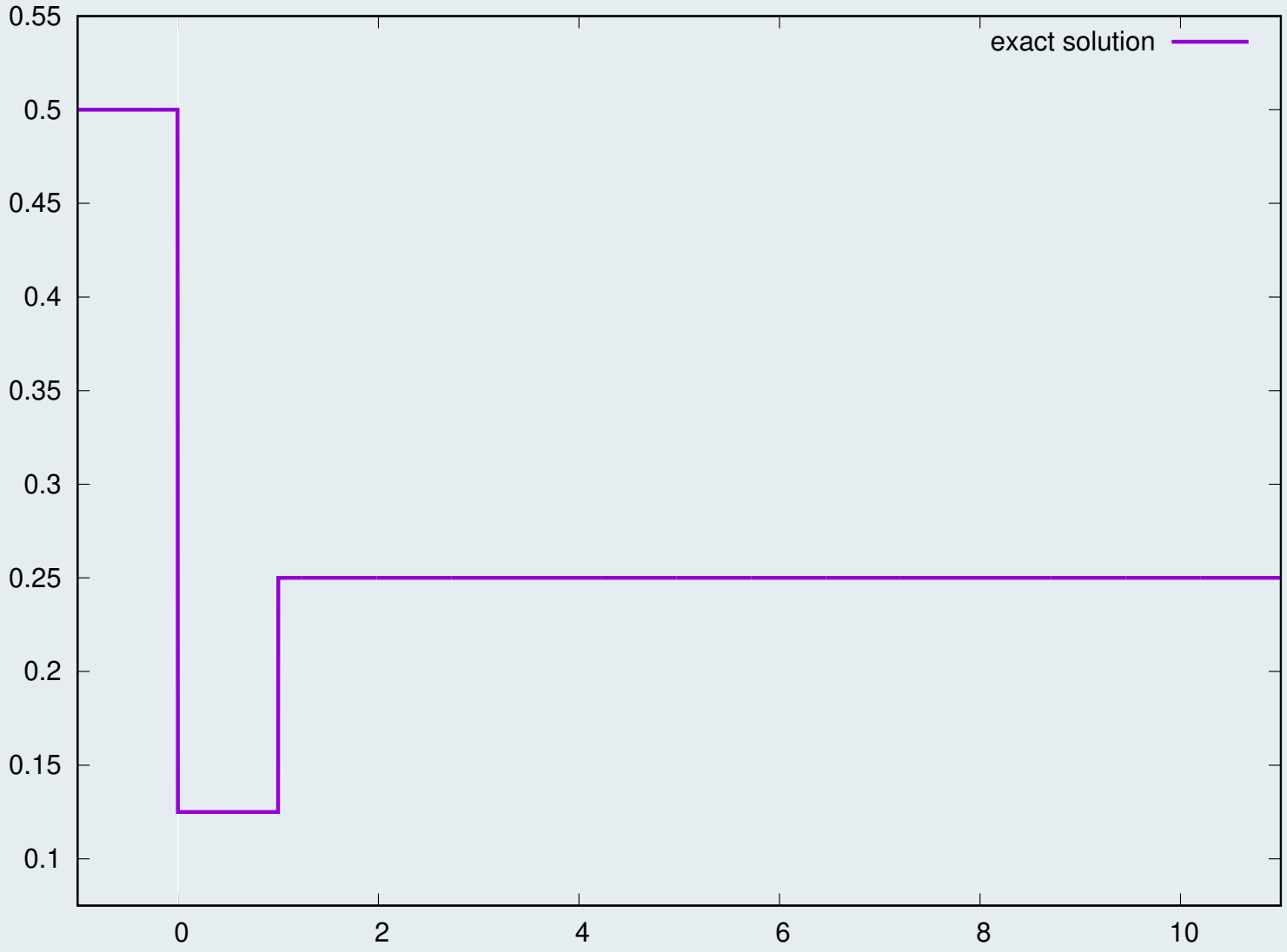
Choc en 1

- $S = \dfrac{f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{8})}{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}} = \dfrac{5}{8}$ vitesse du choc [R-H]
- $\rho(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{si } x \in]\frac{3}{4}\mathrm{t}, 1 + S\,t[, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > 1 + S\,t. \end{cases}$

Détente en 0

- $a'(\rho) = -2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad a(\cdot)$ strictement décroissante
- $a(\cdot)$ réalise une bijection entre $[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}]$ et $[0, \frac{3}{4}]$
- $a(\rho) = b \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - 2\,\rho = b \quad \Longleftrightarrow \quad a^{-1}(b) = \frac{1-b}{2}$
- $\rho(x,t) = \frac{1-\frac{x}{t}}{2}, \quad \text{si} \quad \frac{x}{t} \in [0, \frac{3}{4}]$

Solution faible entropique

- $$\rho(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1-\frac{x}{t}}{2}, & \text{si } \frac{x}{t} \in [0, \frac{3}{4}], \\ \frac{1}{8}, & \text{si } x \in [\frac{3}{4}\text{t}, 1 + S\,t[, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > 1 + S\,t. \end{cases}$$
- Solution valable jusqu'à $t = 8$, instant auquel l'onde de détente rencontre l'onde de choc
- Après ce temps, la droite caractéristique du choc devient courbe et est définie par une EDO non-linéaire : $x_c'(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{x_c(t)}{t}$ avec $x_c(8) = 6$

Trafic routier