

# Chapitre 3

## Résolution analytique des lois de conservation scalaires

**François Vilar**

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck  
Université de Montpellier



**IMAG**  
INSTITUT MONTEPELLIERAIN  
ALEXANDER GROTHENDIECK



- 1 Introduction
- 2 Solutions fortes
- 3 Solutions faibles
- 4 Non-unicité des solutions faibles
- 5 Solutions faibles entropiques
- 6 Problème de Riemann
- 7 Exemple : Trafic routier

## Définition

- Lois de Conservation Scalaires (LCS) :

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0, \quad (1)$$

où  $u(x, t)$  est la solution et  $f(u)$  la fonction flux

- Équation type des EDP hyperboliques

## Pourquoi conservation ?

- Soit un volume de contrôle  $I = [a, b]$

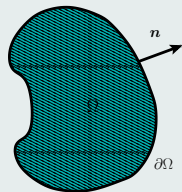
$$\int_I (1) : \quad \int_I \partial_t u \, dx = - \int_I \partial_x f(u) \, dx$$

$$\implies \quad \frac{d}{dt} \int_I u \, dx = f(u)|_a - f(u)|_b$$

- L'évolution temporelle de l'intégrale de  $u$  est dictée par ce qui rentre dans  $I$  moins ce qu'il en sort, et ceci en terme de flux**

## Conservation multidimensionnelle

- $\partial_t u(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{F}(u(\mathbf{x}, t)) = 0$
- $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dV = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(u) \cdot \mathbf{n} dS$



## Difficulté fondamentale des EDP hyperboliques

- **Même en considérant une fonction flux  $f(\cdot)$  et une donnée initiale  $u(\cdot, 0)$  très régulières (par exemple  $C^\infty$ ), la solution peut devenir discontinue en temps fini**
- Exemple standard : équation de Burgers

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

# Apparition d'une discontinuité en temps fini

## Problème de Cauchy

$$\bullet \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (C)$$

avec  $f \in \mathcal{C}^2$  et  $u_0 \in \mathcal{C}^1$

## Définition : solution forte

On dit que  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution forte de (C) si :

- $u \in \mathcal{C}^1$
- $u$  satisfait l'équation en tout point

## Comment obtenir une telle solution ?

- Idée : se ramener à une EDO qu'on saurait résoudre

$\implies$  Méthode des caractéristiques

## Forme non-conservative

$$\bullet \partial_t u + f'(u) \partial_x u = 0$$

Solution régulière

## Question

- Existe-t-il une courbe  $x(t)$  sur laquelle la solution  $u$  est conservée ?

## Variation temporelle le long d'une courbe

- Soit la courbe  $x(X, t)$  telle que  $x(X, 0) = X$
- La variation temporelle de la solution le long de cette courbe s'écrit :

$$\frac{d}{dt} u(x(X, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x(X, t), t) + \frac{\partial x(X, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u(x(X, t), t)$$

## Courbe caractéristique

- $$\begin{cases} \frac{\partial x(X, t)}{\partial t} = f'(u(x(X, t), t)), \\ x(X, 0) = X. \end{cases}$$
- $$\frac{d}{dt} u(x(X, t), t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \implies u(x(X, t), t) = u_0(X), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

## Solution forte

- $u(x(X, t), t) = u_0(X), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$
- $x(X, t) = a(u_0(X)) t + X$  avec  $a(u) = f'(u)$

## Remarque

- On connaît l'expression de  $x$  en fonction de  $X$  et  $t$
- Si on trouve la fonction réciproque  $X(x, t)$ , alors la solution forte s'écrit

$$u(x, t) = u_0(X(x, t))$$

## Exemple : advection linéaire

- $\partial_t u + c \partial_x u = 0, \quad c \in \mathbb{R}$  la vitesse de transport
- $f(u) = c u \implies a(u) = c$
- $x(X, t) = c t + X \iff X(x, t) = x - c t$
- La solution forte s'écrit donc :

$$u(x, t) = u_0(x - c t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$



# Équation de transport : $c = 1$

## Cas général

- Il est très difficile de trouver la fonction réciproque  $X(x, t)$
- On peut utiliser une méthode de résolution numérique de l'équation

$$g(X) = 0 \quad \text{avec} \quad g(X) = a(u_0(X)) t + X - x,$$

pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  donné

## Exemple : méthode de Newton

- $X_0 = x$
- $X_{n+1} = X_n - \frac{g(X_n)}{g'(X_n)}$
- Si  $|X_{n+1} - X_n| \leq tol$  alors  $X = X_{n+1}$

## Remarque : Hypothèse cruciale

- L'existence de la solution forte repose sur l'hypothèse qu'en tout point  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , il n'y a qu'**une seule** caractéristique qui y passe

## Exemple : Burgers

$$\bullet \begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$

$$\bullet f(u) = \frac{1}{2} u^2 \implies a(u) = u$$

$$\bullet x(X, t) = u_0(X) t + X$$

$$= \begin{cases} t + X, & \text{si } X \leq 0, \\ (1 - X) t + X, & \text{si } X \in [0, 1], \\ X, & \text{si } X \geq 1. \end{cases}$$

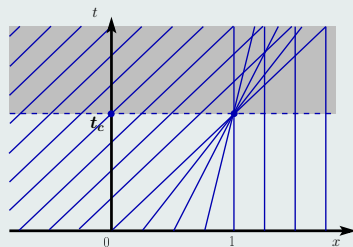


Figure : Courbes caractéristiques dans le plan  $(x, t)$

## Solution forte

(à faire en cours)

- Par la méthode des caractéristiques, on peut obtenir la solution forte :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq t, \\ \frac{1-x}{1-t}, & \text{si } x \in [t, 1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_c[$$

- $t_c$  est le temps critique où les caractéristiques de croisent

# Équation de Burgers : solution forte

## Théorème

On suppose que :

- $f \in \mathcal{C}^2$  et  $u_0 \in \mathcal{C}^1$ ,
- la borne inférieure  $D = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left( \frac{d}{dx} a(u_0(x)) \right)$  est réelle,

alors en posant

$$\bullet t_c = \begin{cases} +\infty & \text{si } D \geq 0 \\ -\frac{1}{D} & \text{si } D < 0 \end{cases}$$

le problème de Cauchy admet une solution unique  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \times [0, t_c[$

## Exemple : Burgers

- $f(u) = \frac{1}{2} u^2$  avec  $u_0(x) = \sin(2\pi x)$
- $a(u_0(x)) = \sin(2\pi x) \implies \frac{d}{dx} a(u_0(x)) = 2\pi \cos(2\pi x)$
- $D = -2\pi < 0 \implies t_c = \frac{1}{2\pi} \simeq 0.1592$

## Remarque

- La théorie des solutions fortes ( $u \in \mathcal{C}^1$ ) s'étend aux fonction **continues et continûment dérivables par morceaux** ( $\mathcal{C}^0$  et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux)
- L'équation  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  est vérifiée partout sauf sur les lignes de perte de régularité  $\mathcal{C}^1$
- Sur ces même lignes, l'équation est vraie séparément de part et d'autre

## Théorème

Soit  $a_0(x) = a(u_0(x))$ . On suppose que :

- $a_0 \in \mathcal{C}^0 \cap L^\infty(\mathbb{R})$  et dérivable par morceaux
- $a_0$  admet en tout point une dérivée à gauche et à droite :

$$D \leq a'_0(x^\pm) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors en posant

$$\bullet t_c = \begin{cases} +\infty & \text{si } D \geq 0 \\ -\frac{1}{D} & \text{si } D < 0 \end{cases}$$

le problème de Cauchy admet une solution unique sur  $\mathbb{R} \times [0, t_c[$

## Retour à l'exemple précédent

- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$
- $a_0(x) = u_0(x) \implies a'_0(x^\pm) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Le temps critique est donc  $t_c = 1$
- Par la méthode des caractéristiques, on obtient la solution forte :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq t, \\ \frac{1-x}{1-t}, & \text{si } x \in [t, 1], \\ 0, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$$

## Question

- Que se passe-t-il après l'instant  $t_c$  ?
- Existe-t-il une solution après l'instant  $t_c$  ?
- Est-ce utile de connaître la solution après l'apparition de discontinuités ?  
 $\implies$  **Problème essentiel, théorie des solutions faibles**

# Équation de Burgers : solution faible



## Rappel

- $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^1$  à support compact  
Exemple :  $\phi(x, t) = 0$  si  $t > T$  ou  $|x| > A$

## Remarque

- $u$  solution forte de (C)
- $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

$$- \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \phi \, dx dt = 0$$

$$\iff \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) \, dx dt - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) \, dx = 0 \quad (\text{F})$$

- Les dérivées  $\partial_t$  et  $\partial_x$  sont à présent portées par  $\phi$
- (F) a un sens dès que  $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

## Définition : solution faible

- On dit que  $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  est une solution faible de (C) si  $u$  vérifie (F)  
 $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

## Remarque

- $u$  solution forte  $\implies u$  solution faible
- $u$  solution faible  $\mathcal{C}^0$  et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux  $\implies u$  solution forte

## Hypothèses

On considérera uniquement :

- Les solutions faibles  $\mathcal{C}^1$  par morceaux
- Un nombre fini de discontinuité (*sauts*) dans l'espace  $(x, t)$
- Chaque discontinuité  $\Sigma$  admet une paramétrisation  $(\sigma(t), t)$  avec  $\sigma(\cdot)$  fonction  $\mathcal{C}^1$
- On note  $\mathbf{n}$  une normale de  $\Sigma$  définie comme  $\mathbf{n} = (n_x, n_t)^t = (1, \sigma'(t))^t$
- Chaque solution  $u$  admet de part et d'autre de chaque courbe des limites notée  $u^-$  et  $u^+$  solution fortes de (C)

## Question

- Toutes les discontinuités sont-elles admissibles ?

## Relation de Rankine-Hugoniot (R-H)

- La solution  $u$  vérifie la relation de *saut* suivante le long de  $\Sigma$  :

$$[f(u)] = \sigma'(t) [u],$$

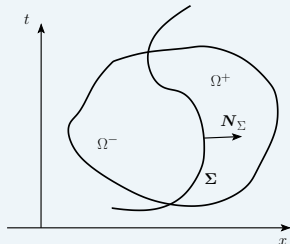
où  $[\phi] = \phi^+ - \phi^-$

- Cette relation nous permet de définir la vitesse de propagation  $S = \sigma'(t)$  des discontinuités admissibles comme :

$$S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$$

## Preuve

- $u$  solution faible et  $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$
- $\int_{\Omega} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt = 0$
- $\int_{\Omega^-} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt + \int_{\Omega^+} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt = 0$



## Preuve

- $u$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$

$$\bullet - \int_{\Omega^-} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \phi \, dx dt + \int_{\partial\Omega^- \cap \Sigma} (u^- \phi n_t^- + f(u^-) \phi n_x^-) \, dx dt - \int_{\Omega^+} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \phi \, dx dt + \int_{\partial\Omega^+ \cap \Sigma} (u^+ \phi n_t^+ + f(u^+) \phi n_x^+) \, dx dt = 0$$

- $u$  est solution forte sur  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$

- $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$  et  $\mathbf{n} = (1, \sigma'(t))$

- $\int_{\partial\Omega^+ \cap \Sigma} ((u^+ - u^-) n_t^+ + (f(u^+) - f(u^-)) n_x^+) \phi \, dx dt = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$

- $(u^+ - u^-) n_t^+ + (f(u^+) - f(u^-)) n_x^+ = 0$

- $f(u^+) - f(u^-) = \sigma'(t) (u^+ - u^-)$

## Retour à l'exemple précédent

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 1} u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1, \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$\bullet S = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1}{2} \quad \text{Rankine-Hugoniot}$$

• Pour  $t \geq 1$ , le choc se propage à la vitesse  $\frac{1}{2}$

$$\bullet x_c(t) = 1 + \frac{t-1}{2} = \frac{1+t}{2} \quad \text{Courbe du choc}$$

$$\bullet u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \frac{1+t}{2} \\ 0, & \text{si } x > \frac{1+t}{2} \end{cases}, \quad \forall t \geq 1.$$

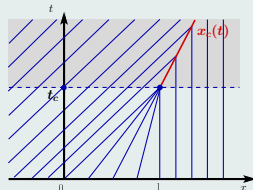


Fig. : Courbes caractéristiques

## Question

- Si (C) admet une solution forte, cette solution est **unique**
- Qu'en est-il des solutions faibles ?

## Non-unicité des solutions faibles - Exemple

- $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$
- $$f(u) = \frac{1}{2} u^2 \implies a(u) = u$$
- $$x(X, t) = \begin{cases} X, & \text{si } X < 0, \\ t + X, & \text{si } X > 0. \end{cases}$$

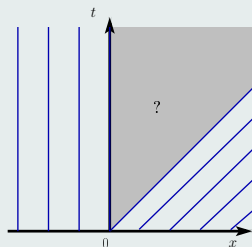


Figure : Courbes caractéristiques

## Solution discontinue

- $$S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{1}{2} \quad \text{[R-H]}$$
- $$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{1}{2} t \\ 1, & \text{si } x > \frac{1}{2} t \end{cases}$$
- Choc de détente**

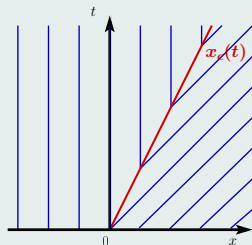


Figure : Courbes caractéristiques

# Solution faible discontinue

## Solution faible régulière

- $$\begin{cases} \frac{\partial x(X, t)}{\partial t} = a(u(x(X, t), t)) \\ x(X, 0) = X. \end{cases}$$
- $$u(x(X, t), t) = a^{-1}\left(\frac{\partial x(X, t)}{\partial t}\right)$$
- $a(u) = u$  et  $\frac{\partial x(0, t)}{\partial t} = \xi = \frac{x}{t}$
- $$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{t}, & \text{si } x \in [0, t], \\ 1, & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

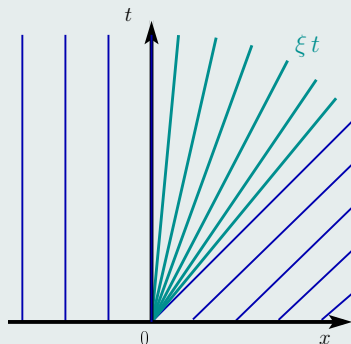


Figure : Courbes caractéristiques

## Remarque

- On a trouvé deux solutions faibles pour ce problème
- Certains problèmes admettent une infinité de solutions faibles
- Peut-on trouver un critère permettant de sélectionner la *bonne* solution ?



## Solution faible régulière

## Second principe de la thermodynamique

- L'entropie d'un système ne fait que croître
- Transformation réversible :  $\Delta S = 0$
- Transformation irréversible :  $\Delta S > 0$

## Définition

- Une fonction strictement convexe  $\eta \in \mathcal{C}^2$  est une entropie de l'équation  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  ssi  $\exists \psi \in \mathcal{C}^1$  appelé flux d'entropie tel que si  $u$  est une solution forte alors  $u$  satisfait aussi la loi de conservation

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) = 0$$

## Cas scalaire

- Toute fonction  $\eta \in \mathcal{C}^2$  strictement convexe est une entropie car il suffit de choisir  $\psi$  tel que  $\psi'(u) = \eta'(u) f'(u)$

$$\eta'(u) (\partial_t u + \partial_x f(u)) = \partial_t \eta(u) + \eta'(u) f'(u) \partial_x u = \partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) = 0$$

## Définition

- Une solution faible  $u$  de (C) est dite entropique ssi,  $\forall$  entropie  $\eta$  associée à  $\psi$ ,  $u$  satisfait l'inégalité d'entropie suivante

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\eta(u) \partial_t \phi + \psi(u) \partial_x \phi) \, dx dt \geq 0, \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$$

- On note généralement que  $\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) \leq 0$  en formulation faible

## Explications

- Dans la physique des milieux continus, il n'y a pas de discontinuité des variables thermodynamiques
- Il y a toujours un terme de viscosité, aussi petit soit-il (exemple : viscosité de l'air sur les vagues)
- Considérons l'équation  $\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon \quad (\mathcal{V}^\varepsilon)$
- La viscosité régularise (lisse) la solution
- Une solution faible  $u$  sera entropique si elle est la limite d'une solution visqueuse  $u^\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

## Preuve

- $\eta'(u^\varepsilon) \times (v^\varepsilon) : \quad \partial_t \eta(u^\varepsilon) + \partial_x \psi(u^\varepsilon) = \varepsilon \eta'(u^\varepsilon) \partial_{xx} u^\varepsilon$   
 $\quad \quad \quad = \varepsilon \partial_{xx} \eta(u^\varepsilon) - \varepsilon \eta''(u^\varepsilon) (\partial_x u^\varepsilon)^2$
- $\eta(\cdot)$  est strictement convexe  $\implies \eta''(u^\varepsilon) > 0$
- $\partial_t \eta(u^\varepsilon) + \partial_x \psi(u^\varepsilon) \leq \varepsilon \partial_{xx} \eta(u^\varepsilon)$
- Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  on obtient  $\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) \leq 0$  en formulation faible

## Théorème

- On suppose que  $f \in C^1$  et que  $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$
- Alors le problème de Cauchy (C) admet une unique solution faible entropique bornée dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- De plus, cette solution vérifie le principe du maximum

## Principe du maximum

- Si  $\alpha \leq u_0(x) \leq \beta$  presque partout dans  $\mathbb{R}$
- Alors  $\forall t > 0, \quad \alpha \leq u(x, t) \leq \beta$  presque partout dans  $\mathbb{R}$

## Lemme

- Soit  $u$  une solution faible  $\mathcal{C}^1$  par morceaux de (C)
- Alors  $u$  est l'unique solution entropique ssi

$$\psi(u^+) - \psi(u^-) \leq S(\eta(u^+) - \eta(u^-))$$

- En tout point de chaque courbe de discontinuité
- Pour tout couple  $(\eta, \psi)$  entropie - flux d'entropie

## Preuve

- Même démo que pour [R-H] en partant de l'inégalité d'entropie

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\eta(u) \partial_t \phi + \psi(u) \partial_x \phi) dx dt \geq 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$$

## Proposition

- Soit un flux  $f \in \mathcal{C}^2$  strictement convexe (*respectivement concave*)
- Alors, si  $u$  est la solution entropique, elle vérifie sur chaque discontinuité

$$u^- > u^+ \quad (\text{respectivement } u^- < u^+)$$

# Preuve

- Introduisons deux fonctions

$$g(u) = f(u) - f(u^+) - S(u - u^+) \quad \text{et} \quad H(u) = \psi(u) - S\eta(u)$$

- Par définition et selon Rankine-Hugoniot  $g(u^+) = g(u^-) = 0$

- D'après le lemme précédent,  $H(u^+) - H(u^-) \leq 0$

$$\bullet \int_{u^-}^{u^+} H'(v) dv \leq 0 \iff \int_{u^-}^{u^+} (\psi'(v) - S\eta'(v)) dv \leq 0$$

$$\bullet \int_{u^-}^{u^+} \eta'(v) (f'(v) - S) dv \leq 0 \iff \int_{u^-}^{u^+} \eta'(v) g'(v) dv \leq 0$$

$$\bullet - \int_{u^-}^{u^+} \eta''(v) g(v) dv + \underbrace{\left[ \eta'(v) g(v) \right]_{u^-}^{u^+}}_{=0} \leq 0 \iff \int_{u^-}^{u^+} \underbrace{\eta''(v)}_{>0} g(v) dv \geq 0$$

$$\bullet g(u) = f(u) - f(u^+) - S(u - u^+) \iff g''(u) = f''(u)$$

- $f$  est strict. convexe (resp. concave), donc  $g''(u) > 0$  (resp.  $g''(u) < 0$ )

## Preuve

- La fonction  $g$  est strictement convexe (*respectivement concave*)

$$g(u) = g((1 - \theta)u^- + \theta u^+) \underbrace{<}_{\text{resp. } >} (1 - \theta)g(u^-) + \theta g(u^+) = 0$$

- Par conséquent, si  $f$  est strictement convexe  $\implies u^- > u^+$   
si  $f$  est strictement concave  $\implies u^- < u^+$

## Remarque

- Comme  $f \in \mathcal{C}^2$  et d'après la relation de Rankine-Hugoniot

$$S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} = f'(\gamma) \quad \text{avec } \gamma \in ]\min(u^-, u^+), \max(u^-, u^+)[$$

- Si  $f \in \mathcal{C}^2$  strictement convexe  $\implies f'$  est strictement croissante

$$u^- > u^+ \implies f'(u^-) > S > f'(u^+)$$

- Si  $f \in \mathcal{C}^2$  strictement concave  $\implies f'$  est strictement décroissante

$$u^- < u^+ \implies f'(u^-) > S > f'(u^+)$$

## Condition d'entropie de Lax

- Si  $f \in \mathcal{C}^2$  est strictement convexe ou concave, un choc est entropique ssi

$$a(u^-) > S > a(u^+),$$

où  $S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$  la vitesse de propagation du choc

## Remarques

- La vitesse de la discontinuité est supérieure à la vitesse de propagation en amont et inférieure à la vitesse en aval
- Les caractéristiques rentrent dans le choc
- Un choc entropique est un processus irréversible au cours duquel on perd de l'information. On ne peut pas savoir d'où vient la solution

## Retour à l'exemple précédent : solution faible discontinue

- $u^- = 0$  et  $u^+ = 1 \implies a(u^-) = 0$  et  $a(u^+) = 1$
- $S = \frac{1}{2} \implies$  Solution faible non-entropique



## Problème de Riemann

- Problème de Cauchy avec une donnée initiale à deux états constants

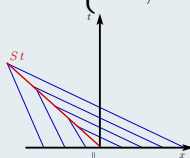
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^-, & \text{si } x < 0 \\ u^+, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

où  $u^-$  et  $u^+$  sont constantes données, et  $f(\cdot) \in \mathcal{C}^2$

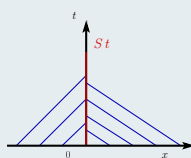
$f(\cdot)$  strictement convexe et  $u^- > u^+$

- $a(u^-) > a(u^+) \implies$  choc avec  $S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$

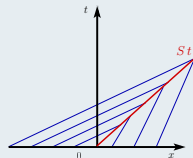
$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < S, \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > S. \end{cases}$$



(a) Choc à gauche



(b) Choc centré



(c) Choc à droite

## Problème de Riemann

- Problème de Cauchy avec une donnée initiale à deux états constants

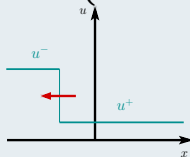
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^-, & \text{si } x < 0 \\ u^+, & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

où  $u^-$  et  $u^+$  sont constantes données, et  $f(\cdot) \in \mathcal{C}^2$

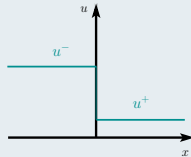
$f(\cdot)$  strictement convexe et  $u^- > u^+$

- $a(u^-) > a(u^+) \implies$  choc avec  $S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$

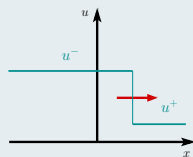
$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < S, \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > S. \end{cases}$$



(a) Choc à gauche



(b) Choc centré



(c) Choc à droite

## Remarque : invariance par homothétie

- Soit  $u(x, t)$  solution de l'équation  $\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0$
- Soit le changement de variables  $\tilde{x} = \lambda x$  et  $\tilde{t} = \lambda t$
- Comme  $\partial_x = \partial_{\tilde{x}} \tilde{x} \partial_{\tilde{x}} = \lambda \partial_{\tilde{x}}$  et  $\partial_t = \partial_{\tilde{t}} \tilde{t} \partial_{\tilde{t}} = \lambda \partial_{\tilde{t}}$ , on obtient

$$\partial_t u(\tilde{x}, \tilde{t}) + \partial_x f(u(\tilde{x}, \tilde{t})) = \lambda (\partial_{\tilde{t}} u(\tilde{x}, \tilde{t}) + \partial_{\tilde{x}} f(u(\tilde{x}, \tilde{t}))) = 0$$

- $u(\lambda x, \lambda t)$  est donc aussi solution de l'équation  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$
- On va chercher des solutions de la forme  $u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$

### Solutions auto-semblables ou auto-similaires

#### $f(\cdot)$ strictement convexe et $u^+ > u^-$

- $a(u^+) > a(u^-) \implies$  détente
- Soit la fonction  $u(x, t) = v(\xi)$  avec  $\xi = \frac{x}{t}$
- $\partial_t v(\xi) = v'(\xi) \partial_t \xi = -\frac{\xi}{t} v'(\xi)$  et  $\partial_x v(\xi) = v'(\xi) \partial_x \xi = \frac{1}{t} v'(\xi)$
- $u(x, t)$  sera solution si  $v'(\xi) (a(v) - \xi) = 0$
- En excluant la fonction constante  $v'(\xi) = 0$ , on obtient que  $a(v) = \xi$

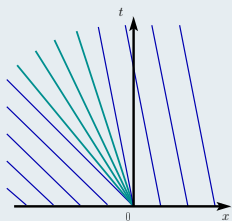
## $f(\cdot)$ strictement convexe et $u^+ > u^-$

- Comme  $a(\cdot)$  est strictement croissante,  $a$  réalise une bijection entre

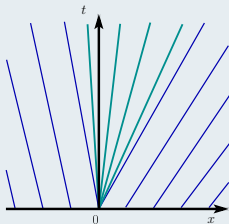
$$[u^-, u^+] \longleftrightarrow [a(u^-), a(u^+)]$$

- Donc  $v(\xi) = a^{-1}(\xi)$  pour tout  $\xi \in [a(u^-), a(u^+)]$

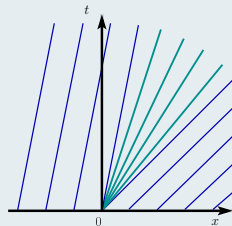
$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < a(u^-), \\ a^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & \text{si } \frac{x}{t} \in [a(u^-), a(u^+)], \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > a(u^+). \end{cases}$$



(a) Détente à gauche



(b) Détente centré



(c) Détente à droite

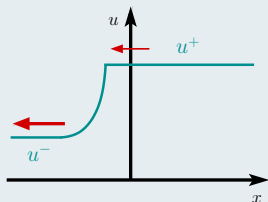
## $f(\cdot)$ strictement convexe et $u^+ > u^-$

- Comme  $a(\cdot)$  est strictement croissante,  $a$  réalise une bijection entre

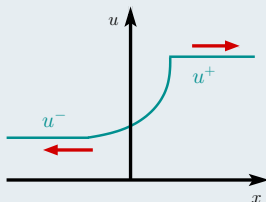
$$[u^-, u^+] \longleftrightarrow [a(u^-), a(u^+)]$$

- Donc  $v(\xi) = a^{-1}(\xi)$  pour tout  $\xi \in [a(u^-), a(u^+)]$

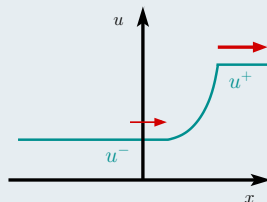
$$\bullet u(x, t) = \begin{cases} u^-, & \text{si } \frac{x}{t} < a(u^-), \\ a^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & \text{si } \frac{x}{t} \in [a(u^-), a(u^+)], \\ u^+, & \text{si } \frac{x}{t} > a(u^+). \end{cases}$$



(a) Détonation à gauche



(b) Détonation centrée



(c) Détonation à droite

## Conclusion

- On voit que dans tous les cas, l'unique solution entropique bornée du problème de Riemann ne dépend que de  $\frac{x}{t}$ , solution dite auto-semblable.

$$u(x, t) = \mathcal{W} \left( \frac{x}{t}; u^-, u^+ \right)$$

## Proposition

- L'unique solution entropique du problème de Riemann vérifie

$$\mathcal{W} \left( \frac{x}{t}; u^-, u^+ \right) = \begin{cases} u^- & \text{si } \frac{x}{t} < \inf_{u \in I(u^-, u^+)} (a(u)) \\ u^+ & \text{si } \frac{x}{t} > \sup_{u \in I(u^-, u^+)} (a(u)) \end{cases}$$

où  $I(u^-, u^+) = [\min(u^-, u^+), \max(u^-, u^+)]$

## Exemple : Trafic routier

- $\rho(x, t)$  la densité de véhicules le long d'une autoroute rectiligne et infinie
- $N(x_0, x_1, t) = \int_{x_0}^{x_1} \rho(x, t) dx$  le nombre de voitures entre  $x_0$  et  $x_1$
- $v(x, t)$  la vitesse des véhicules
- $f(x, t) = \rho(x, t) v(x, t)$  facteur de perte ou de gain de véhicules
- On obtient alors l'équation de conservation suivante

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0.$$

- Modèle LWR (Lighthill-Whitham-Richards) :

$$v(\rho) = u_{\max} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

- $u_{\max} = 130$  et  $\rho_{\max} = \frac{1}{\mathcal{L}}$  avec  $\mathcal{L}$  la longueur moyenne des véhicules
- Version adimensionnée  $u_{\max} = 1$  et  $\rho_{\max} = 1$

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho(1 - \rho)) = 0.$$

## Trafic routier : problème simple

- $$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho(1-\rho)) = 0, \\ \rho_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{8}, & \text{si } x \in ]0, 1[, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$
- $f(\rho) = \rho(1-\rho) \implies a(\rho) = 1 - 2\rho$
- $x(X, t) = a(\rho_0(X))t + X$ 

$$= \begin{cases} X, & \text{si } X < 0, \\ \frac{3}{4}t + X, & \text{si } X \in ]0, 1[, \\ \frac{1}{2}t + X, & \text{si } X > 1. \end{cases}$$

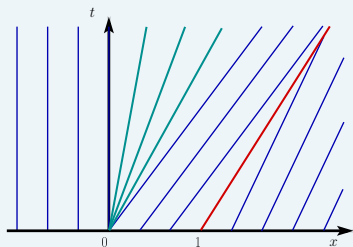


Figure : Courbes caractéristiques dans le plan  $(x, t)$

## Choc en 1

- $$S = \frac{f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{8})}{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}} = \frac{5}{8}$$
- $$\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{si } x \in ]\frac{3}{4}t, 1 + St[, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > 1 + St. \end{cases}$$

vitesse du choc [R-H]



## Détente en 0

- $a'(\rho) = -2 < 0 \implies a(\cdot)$  strictement décroissante
- $a(\cdot)$  réalise une bijection entre  $[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}]$  et  $[0, \frac{3}{4}]$
- $a(\rho) = b \iff 1 - 2\rho = b \iff a^{-1}(b) = \frac{1-b}{2}$
- $\rho(x, t) = \frac{1-x}{2t}$ , si  $\frac{x}{t} \in [0, \frac{3}{4}]$

## Solution faible entropique

- $\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1-x}{2t}, & \text{si } \frac{x}{t} \in [0, \frac{3}{4}], \\ \frac{1}{8}, & \text{si } x \in [\frac{3}{4}t, 1 + St[, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > 1 + St. \end{cases}$
- Solution valable jusqu'à  $t = 8$ , instant auquel l'onde de détente rencontre l'onde de choc
- Après ce temps, la droite caractéristique du choc devient courbe et est définie par une EDO non-linéaire :  $x'_c(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{x_c(t)}{t}$  avec  $x_c(8) = 6$

# Trafic routier