

Chapitre 2

Méthode des Différences Finies

François Vilar

Institut Montpellierain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier



IMAG
INSTITUT MONTELLIERAIN
ALEXANDER GROTHENDIECK



- 1 Introduction
- 2 Approximation d'opérateurs différentiels
- 3 Problèmes aux limites stationnaires
- 4 Problèmes d'évolution

Méthodes Différences Finies (DF)

- **DF : approcher les dérivées d'une fonction en utilisant uniquement la valeur de cette fonction en un nombre fini de points**

$$u'(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

- Plus précisément, on va chercher à approcher L , l'opérateur différentiel étudié, par L_h un opérateur approché

Exemple : $L u(x) = u'(x)$

- Soit $u(\cdot)$ une fonction régulière
- On considère l'opérateur différentiel $L u(x) = u'(x)$
- Par définition, on a que : $L u(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$
- Un choix évident est donc d'introduire l'opérateur approché D_+ suivant

$$D_+ u(x) \equiv L_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Exemple suite : $Lu(x) = u'(x)$

- Un autre choix possible serait d'introduire D_- tel que

$$D_- u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

- Ou encore l'opérateur approché D_0 tel que

$$D_0 u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = \frac{(D_+ + D_-)}{2} u(x)$$

Question

- Toutes ces approximations se valent-elles ?

Développement de Taylor

- $D_+ u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \frac{u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + O(h^3) - u(x)}{h} = u'(x) + O(h)$
- $D_- u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = \frac{u(x) - u(x) + hu'(x) - \frac{h^2}{2} u''(x) + O(h^3)}{h} = u'(x) + O(h)$
- $D_0 u(x) = \frac{u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - u(x) + hu'(x) - \frac{h^2}{2} u''(x) + O(h^3)}{2h} = u'(x) + O(h^2)$

Exemple suite : $Lu(x) = u'(x)$

- $|Lu(x) - D_+ u(x)| \leq \frac{h}{2} \max_{\xi} |u''(\xi)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
- $|Lu(x) - D_- u(x)| \leq \frac{h}{2} \max_{\xi} |u''(\xi)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
- $|Lu(x) - D_0 u(x)| \leq \frac{h^2}{6} \max_{\xi} |u^{(3)}(\xi)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
- D_0 converge comme h^2 alors que D_+ et D_- ne converge que comme h

Infinité d'approximations possibles

- $D_3 u(x) = \frac{1}{6h} (2u(x+h) + 3u(x) - 6u(x-h) + u(x-2h))$
 $\implies |Lu(x) - D_3 u(x)| \leq Ch^3$

Erreur de troncature et consistance

- On définit l'erreur de troncature τ_h comme $\tau_h = L_h u - Lu$
- Si $\tau_h = O(h^p)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur est dit consistant, *i.e.* $L_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} L$,
 et précis à l'ordre p

Question

- Comment construire une approximation ?

Application

- On souhaite approcher $Lu = u'$ en utilisant les points x , $x - h$ et $x - 2h$

$$\implies L_h u(x) = \frac{a u(x) + b u(x - h) + c u(x - 2h)}{h}$$

- Les constantes a , b et c sont les coefficients à déterminer
- On veut la précision maximum

$$\begin{aligned} \bullet L_h u(x) = & \frac{(a + b + c)}{h} u(x) - (b + 2c) u'(x) + (b + 4c) \frac{h}{2} u''(x) \\ & - (b + 8c) \frac{h^2}{6} u^{(3)}(x) + O(h^3) \end{aligned}$$

- Pour que la méthode soit consistante, il faut que

$$a + b + c = 0 \quad \text{et} \quad b + 2c = -1$$

- De plus, pour être le plus précis possible, il faut prendre $b + 4c = 0$

Application suite

- On obtient un système linéaire à 3 équations et 3 inconnues
- La résolution de ce système nous donne $a = 3/2$, $b = -2$ et $c = 1/2$

$$\implies L_h u(x) = \frac{1}{2h} (3u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h))$$

- Comme $b + 8c \neq 0$, la méthode est d'ordre 2

$$\tau_h(x) = -\frac{h^2}{3} u^{(3)}(x) + O(h^3) = O(h^2)$$

Exemple d'approximation d'ordre plus élevé : $Lu(x) = u''(x)$

- $D_0^{(2)} u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$ approximation centrée
- Pour obtenir cette approximation, on peut utiliser la même procédure que précédemment (développement de Taylor + résolution système linéaire)
- On peut également utiliser les opérateurs approchés de moindre degré :

$$D_- D_+ u(x) = \frac{1}{h} (D_- u(x+h) - D_- u(x)) \equiv D_0^{(2)} u(x)$$

Cas général : $Lu(x) = u^{(k)}(x)$ (voir TD et TP)

Afin d'obtenir une approximation consistante de $u^{(k)}$, on peut par exemple

- Utiliser les approximations de degré inférieur

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{Pour } k = 3 : & \bullet D_0 D_- D_+ u(x) = D_0 D_0^{(2)} u(x) = u^{(3)} + O(h^2) \\ & \bullet D_0 D_+^2 u(x) = D_0 D_+ D_+ u(x) = u^{(3)} + O(h) \end{aligned}$$

- Résoudre un système linéaire

\hookrightarrow • On approche $u^{(k)}$ en utilisant les m points $(x_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$, avec $m \geq k$

- Les m points $(x_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ sont appelés le *stencil* d'approximation

$$\implies L_h u(x) = \frac{c_1 u(x_1) + c_2 u(x_2) + \dots + c_m u(x_m)}{h^k}$$

- Il faut déterminer les m coefficients afin d'avoir $\tau_h u(x) = O(h^p)$
- Après développement de Taylor, on obtient le système suivant :

$$\frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=1}^m c_j \frac{(x_j - x)^{i-1}}{h^k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i-1 = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autre exemple

- Soit $u(\cdot)$ une fonction régulière
- Soit l'opérateur différentiel $Lu(x) = u''(x) - 3u'(x) + 6u(x)$
- Soit L_h un opérateur approché défini par

$$L_h u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{3}{2} \frac{u(x+h) - u(x-h)}{h} + 6u(x)$$

- Par un simple développement de Taylor, on peut montrer que

$$\tau_h(x) = \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x) - \frac{h^2}{2} u^{(3)}(x) + O(h^4) = O(h^2).$$

- L'opérateur est donc consistant, et d'ordre 2

Autre exemple

- $Lu(x, t) = \partial_t u(x, t) + c(x) \partial_x u(x, t)$
- $L_h u(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + c(x) \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x}$
- $\tau_h = L_h u - Lu = O(\Delta t + \Delta x^2)$ opérateur consistant

Remarque

- Stationnaire = qui ne dépend pas du temps ($\partial_t = 0$)

Diffusion de la chaleur dans un fil contenu entre $[0, 1]$

$$\bullet \begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_x (\kappa(x) \partial_x u(x, t)) + \varphi(x, t), & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]0, 1[\\ u(0, t) = \alpha(t), & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(1, t) = \beta(t), & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in]0, 1[\end{cases}$$

- $u(x, 0) = u_0(x)$ Condition initiale
- $u(0, t) = \alpha(t)$ et $u(1, t) = \beta(t)$ Conditions aux bords de Dirichlet
- $\partial_x u(0, t) = \alpha(t)$ et $\partial_x u(1, t) = \beta(t)$ Conditions aux bords de Neumann
- **Si $\varphi(x, t)$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ ne dépendent pas du temps, on peut espérer au bout d'un certain temps atteindre un état stationnaire**

$$\Rightarrow \begin{cases} -(\kappa(x) u'(x))' = \varphi(x), & \forall x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u(1) = \beta, \end{cases}$$

Problème aux limites

- $-u''(x) = f(x), \quad \forall x \in]0, 1[$ Équation de Poisson
- Afin d'avoir une unique solution, il faut définir des conditions aux bords
 $\implies u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u(1) = \beta$
- On appelle cela un **problème aux limites**

Solution analytique

- Le problème étant très simple, on peut trouver sa solution exacte

$$\implies u(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x + (1-x) \int_0^x y f(y) dy + x \int_x^1 (1-y) f(y) dy$$

Remarque

- Dans la grande majorité des EDP ou des systèmes d'EDP, on ne sait pas trouver l'expression analytique de la solution exacte

Utilisation d'un schéma numérique

Méthode différences finies

- Considérons le problème introduit précédemment

$$\Rightarrow \begin{cases} -u''(x) = f(x), & \forall x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta, \end{cases}$$

- Le terme source $f(\cdot)$ est une fonction donnée
- Les conditions aux bords α et β sont des constantes données
- On échantillonne le domaine $[0, 1]$: introduction d'un maillage



- $x_i = i h$ les points d'approximation, $h = \frac{1}{m+1}$ le pas d'espace
- **On veut calculer de la manière la plus précise possible la solution numérique u_h aux points x_i , notée $u_h(x_i) = u_i$**

Méthode différences finies - suite

- L'EDP se réécrit $Lu(x) = f(x)$ avec l'opérateur différentiel $Lu = -u''$
- Introduisons tout d'abord un exemple d'opérateur différentiel approché

$$L_h u(x) = -\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \quad (1)$$

- La solution approchée u_h sera la fonction solution de l'équation

$$L_h u_h(x) = f(x),$$

tel que $u_h(0) = u_0 = \alpha$ et $u_h(1) = u_{m+1} = \beta$

- En appliquant (1) sur le maillage, on obtient

$$\begin{cases} -\frac{u_2 - 2u_1 + \alpha}{h^2} = f(x_1), & i = 1, \\ -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), & \forall i \in \llbracket 2, m-1 \rrbracket, \\ -\frac{\beta - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} = f(x_m), & i = m. \end{cases}$$

Méthode différences finies - suite

- Ce système linéaire se réécrit sous forme matricielle comme

$$\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F} + \mathbf{B}_c$$

- $\mathbf{U}_h = (u_1, u_2, \dots, u_m)^t$ Vecteur solution

- $\mathbf{F} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m))^t$ Terme source

- $\mathbf{B}_c = \left(\frac{\alpha}{h^2}, 0, \dots, 0, \frac{\beta}{h^2} \right)^t$ Conditions aux bords

- La matrice de discrétisation \mathbf{A}_h s'écrit

$$\mathbf{A}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthode différences finies - suite

- A_h étant irréductible à diagonale fortement dominante, elle est inversible (voir rappels sur les matrices : théorème de Gershgorin, M-matrices, ...)
- Le problème admet donc une unique solution qui s'écrit

$$\mathbf{U}_h = A_h^{-1} (\mathbf{F} + \mathbf{B}_c)$$

Remarque

- Quelle est la précision de la solution numérique u_h ?

Erreur globale

- On appelle erreur globale de l'approximation la quantité vectorielle

$$\epsilon_h = \mathbf{U}_h - \mathbf{U},$$

où le vecteur $\mathbf{U} = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_m))^t$

- Étudier la précision de la solution revient à étudier la norme de cette quantité, en particulier son comportement quand $h \rightarrow 0$

Normes

- On utilisera en particulier les normes suivantes :

$$\|\mathbf{E}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |E_i|, \quad \|\mathbf{E}\|_1 = h \sum_{i=1}^m |E_i|, \quad \|\mathbf{E}\|_2 = \left(h \sum_{i=1}^m |E_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)^t \in \mathbb{R}^m$ avec $h = \frac{1}{m+1}$

Rapport en erreur de troncature et erreur globale

- On considère l'EDP défini par $Lu(x) = f(x)$
- Pour chaque point x_i , on considère le schéma $L_h u_h(x_i) = f(x_i)$ avec

$$L_h u_h(x_i) = (\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h - \mathbf{B}_c)_i$$

- L'erreur de troncature au point x_i s'écrit donc

$$\begin{aligned} \tau_h(x_i) &= L_h u(x_i) - Lu(x_i) = (\mathbf{A}_h \mathbf{U} - \mathbf{B}_c)_i - f(x_i) \\ &= (\mathbf{A}_h \mathbf{U} - \mathbf{B}_c)_i - (\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h - \mathbf{B}_c)_i \\ &= (\mathbf{A}_h (\mathbf{U} - \mathbf{U}_h))_i \end{aligned}$$

Rapport en erreur de troncature et erreur globale - suite

- En posant $\tau_h = (\tau(x_1), \tau(x_2), \dots, \tau(x_m))^t$, on obtient alors la relation

$$\tau_h = -A_h \epsilon_h$$

- Comme A_h est inversible, on a de plus que

$$\|\epsilon_h\| \leq \|A_h^{-1}\| \|\tau_h\|$$

Remarque

- On considère que le schéma est consistant d'ordre p , avec $p \in \mathbb{N}^*$, *i.e.*

$$\tau_h(x) = O(h^p) \implies \|\tau_h\| = O(h^p)$$

- On fait l'hypothèse que $\|A_h^{-1}\|$ est uniformément borné, *i.e.*

$$\exists C > 0, \forall h \ll 1, \|A_h^{-1}\| \leq C$$

- L'erreur globale de la solution numérique est alors aussi d'ordre p

$$\|\epsilon_h\| = O(h^p)$$

Stabilité

- Soit un problème aux limites stationnaire, défini par une EDP linéaire
- Soit un schéma différences finis pouvant être mis sous la forme suivante

$$A_h \mathbf{U}_h = \mathbf{H}_h,$$

où la matrice A_h est inversible

- On dira alors que la méthode est **stable** si

$$\exists C > 0, \forall h \in \mathbb{R}_+^*, h \ll 1, \quad \|A_h^{-1}\| \leq C$$

Convergence

- En combinant les concepts de consistance et stabilité, on en conclut que

$$\boxed{\text{Consistance} + \text{stabilité} \implies \text{Convergence}}$$

- De plus, on a que $\tau_h = O(h^p) + \text{stabilité} \implies \epsilon_h = O(h^p)$
- Ce n'est généralement vrai que pour les EDP linéaires

Méthode différences finies - suite

- Étudions à présent la stabilité du schéma vu précédemment

$$\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F} + \mathbf{B}_c$$

- On rappelle que la matrice de discrétisation \mathbf{A}_h s'écrit

$$\mathbf{A}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Intéressons nous d'abord à la stabilité L_∞ , *i.e.* $\|\mathbf{A}_h^{-1}\|_\infty \leq C$?
- Pour cela introduisons tout d'abord le problème simplifié suivant :

$$\begin{cases} -v''(x) = 1, & \forall x \in]0, 1[, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

Méthode différences finies - suite

- La solution exacte de ce problème est évidente à obtenir, et s'écrit

$$v(x) = \frac{x(1-x)}{2}$$

- En utilisant le même opérateur approché L_h que dans le schéma étudié, on obtient le système

$$\mathbf{A}_h \mathbf{V}_h = \mathbf{1}_m,$$

où \mathbf{V}_h est le vecteur solution approchée et $\mathbf{1}_m = (1, \dots, 1)^t$

- On rappelle que pour cet opérateur approché, l'erreur de troncature est

$$|\tau_h(x)| = |L_h v(x) - L v(x)| \leq \frac{h^2}{12} \max_{y \in [0,1]} |v^{(4)}(y)|$$

- Il est alors évident que dans ce cas $\tau_h(x) = 0 \implies v_h = v$
- On arrive donc à la conclusion que

$$\mathbf{A}_h \mathbf{V} = \mathbf{1}_m,$$

avec $\mathbf{V} = (v(x_1), v(x_2), \dots, v(x_m))^t$

Méthode différences finies - suite

- On note que A_h est à diagonale dominante et inversible, avec

$$\begin{cases} a_{ii} > 0, & \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \\ a_{ij} \leq 0, & \forall i \neq j \in \llbracket 1, m \rrbracket. \end{cases}$$

- A_h est donc une matrice monotone
- On obtient donc la relation suivante

$$A_h \mathbf{V} = \mathbf{1}_m \implies \|A_h^{-1}\|_\infty = \|\mathbf{V}\|_\infty$$

- Il suffit donc de majorer $\|\mathbf{V}\|_\infty$

$$\|\mathbf{V}\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} |v(x_i)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |v(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{x(1-x)}{2} = \frac{1}{8}$$

- On arrive alors à la conclusion que

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$$

Méthode différences finies - suite

- Revenons au problème qui nous intéresse

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \forall x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u(1) = \beta, \end{cases}$$

- Comme $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$, on peut finalement conclure que le schéma étudié

$$\mathbf{U}_h = \mathbf{A}_h^{-1} (\mathbf{F} + \mathbf{B}_c)$$

est bien **stable en norme** L_∞

- On peut de plus borner l'erreur L_∞ commise pas la solution

$$\|\epsilon_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \max_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|$$

- À présent, intéressons nous à la stabilité L_2 de la méthode présentée
- Comme A_h est symétrique, A_h^{-1} l'est aussi, et on a donc que

$$\|A_h^{-1}\|_2 = \rho(A_h^{-1}) \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$$

Méthode différences finies - suite

- Le schéma est donc bien aussi **stable** L_2
- Sans passer par la stabilité L_∞ , on aurait pu directement voir que

$$\|A_h^{-1}\|_2 = \rho(A_h^{-1}) = \max_{\lambda \in S_p(A_h^{-1})} (|\lambda|) = \max_{\lambda \in S_p(A_h)} (|\lambda^{-1}|) = \frac{1}{\min_{\lambda \in S_p(A_h)} (|\lambda|)}$$

- Il est possible de calculer les valeurs propres de A_h et de trouver

$$\lambda_p = \frac{2}{h^2} (\cos(p \pi h) - 1), \quad \forall p \in \llbracket 1, m \rrbracket$$

- Un simple développement de Taylor permet de trouver

$$\lambda_p = -p^2 \pi^2 + O(h^2) \implies \|A_h^{-1}\|_2 = \frac{1}{\pi^2 + O(h^2)}$$

- Il est clair que $\|A_h^{-1}\|_2$ est borné quand $h \ll 1$
- La méthode est effectivement stable L_2

Convergence pour $\alpha = 10$, $\beta = 15$ et $f = \mathbf{1}_{[0.45, 0.55]}$

Exemple de méthode d'ordre plus élevé

- La méthode vu précédemment est d'ordre 2
- Il est bien entendu possible d'utiliser un schéma plus précis
- Utilisons par exemple l'opérateur approché suivant

$$\begin{aligned}
 L_h u(x) &= \frac{u(x-2h) - 16u(x-h) + 30u(x) - 16u(x+h) + u(x+2h)}{12h^2} \\
 &= -u''(x) + O(h^4)
 \end{aligned}$$

- Appliqué sur le maillage, suffisamment loin des bords, on obtient alors

$$\begin{cases}
 \frac{-16u_1 + 30u_2 - 16u_3 + u_4}{12h^2} = f(x_2) - \frac{\alpha}{12h^2}, & i = 2, \\
 \frac{u_{i-2} - 16u_{i-1} + 30u_i - 16u_{i+1} + u_{i+2}}{12h^2} = f(x_i), & \forall i \in \llbracket 3, m-2 \rrbracket, \\
 \frac{u_{m-3} - 16u_{m-2} + 30u_{m-1} - 16u_m}{12h^2} = f(x_{m-1}) - \frac{\beta}{12h^2}, & i = m-1.
 \end{cases}$$

- Que faire pour $i = 1$ et $i = m$?

Exemple de méthode d'ordre plus élevé - suite

- On utilisera alors un schéma différent à proximité des bords
- On pourrait par exemple utiliser en $i = 1$ l'opérateur approché suivant

$$\begin{aligned} L_h u(x) &= \frac{-11 u(x-h) + 20 u(x) - 6 u(x+h) - 4 u(x+2h) + u(x+3h)}{12 h^2} \\ &= -u''(x) + O(h^3) \end{aligned}$$

- Ou encore l'opérateur suivant afin de préserver la précision du schéma

$$\begin{aligned} L_h u(x) &= \frac{-10u(x-h)+15u(x)+4u(x+h)-14u(x+2h)+6u(x+3h)-u(x+4h)}{12 h^2} \\ &= -u''(x) + O(h^4) \end{aligned}$$

- Pour $i = m$, on pourra utiliser les symétriques de ces opérateurs

Question

- Combien vérifier numériquement l'ordre de précision de la méthode ?

Taux de convergence

- Considérons un schéma théoriquement d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, i.e. $\epsilon_h = O(h^p)$
- Pour $h \ll 1$, on considère qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\epsilon_h = C h^p$
- On peut alors vérifier numériquement l'ordre de convergence de la méthode en faisant

$$p = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{\epsilon_h}{\epsilon_{h \setminus 2}} \right)$$

- Plus h sera petit, plus le taux de convergence calculé sera proche de l'ordre théorique
- À noter que la solution exacte considérée doit être suffisamment régulière

Convergence pour $\alpha = 10$, $\beta = 15$ et $f = \sin(\pi x)$

Convergence pour la méthode d'ordre 2

	L_1		L_2		L_∞	
h	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$	$E_{L_\infty}^h$	$q_{L_\infty}^h$
$\frac{1}{10}$	1.06E-1	1.99	1.18E-1	2.01	1.67E-1	2.01
$\frac{1}{20}$	2.65E-2	2.00	2.95E-2	2.00	4.17E-2	2.00
$\frac{1}{40}$	6.63E-3	2.00	7.37E-3	2.00	1.04E-2	2.00
$\frac{1}{80}$	1.66E-3	2.00	1.84E-3	2.00	2.60E-3	2.00
$\frac{1}{160}$	4.14E-4	-	4.60E-4	-	6.51E-4	-

Convergence pour la méthode d'ordre 4

	L_1		L_2		L_∞	
h	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$	$E_{L_\infty}^h$	$q_{L_\infty}^h$
$\frac{1}{10}$	4.60E-4	2.58	5.62E-4	2.69	9.20E-4	2.86
$\frac{1}{20}$	7.70E-5	3.84	8.73E-5	3.87	1.26E-4	3.90
$\frac{1}{40}$	5.37E-6	3.98	5.98E-6	3.98	8.48E-6	3.99
$\frac{1}{80}$	3.40E-7	4.00	3.78E-7	4.00	5.35E-7	4.00
$\frac{1}{160}$	2.13E-8	-	2.36E-8	-	3.34E-8	-

Remarque

- On a étudié le cas des conditions aux limites de Dirichlet
- Que faire dans le cas des conditions de Neumann ?

Conditions aux limites de Neumann

- Considérons à présent le cas suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \forall x \in]0, 1[\\ u'(0) = \gamma \quad \text{et} \quad u'(1) = \sigma, \end{cases}$$

- Ici, u_0 et u_{m+1} deviennent des inconnues
- On a donc à présent $m + 2$ inconnues
- Voyons comment faire pour u_0 (même chose pour u_{m+1})
- On peut tout d'abord utiliser l'opérateur approché suivant

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h) \quad \implies \quad \frac{u_1 - u_0}{h} = \gamma$$

Conditions aux limites de Neumann

- On obtient alors le système $A_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F} + \mathbf{B}_c$ avec la matrice

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

- Le second membre est ici défini comme

$$\mathbf{F} = (0, f(x_1), \dots, f(x_m), 0)^t$$

- Pour les conditions aux bords, on a à présent

$$\mathbf{B}_c = \left(\frac{\gamma}{h}, 0, \dots, 0, \frac{\sigma}{h} \right)^t$$

Remarque

- À noter que la précision des conditions aux bords n'est que d'ordre 1, alors que le schéma intérieur est d'ordre 2

Conditions aux limites de Neumann

- On peut si on le souhaite utiliser un opérateur plus précis comme

$$u'(x) = \frac{-u(x+2h) + 4u(x+h) - 3u(x)}{2h} + O(h^2) \Rightarrow \frac{-u_2 + 4u_1 - 3u_0}{2h} = \gamma$$

- La matrice de discrétisation devient alors

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

Cas général

- Considérons l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante :

$$a(x) u''(x) + b(x) u'(x) + c(x) u(x) = f(x)$$

- On pourra par exemple utiliser le schéma d'ordre 2 suivant :

$$a(x_i) \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + b(x_i) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + c(x_i) u_i = f(x_i)$$

Conclusion

- Nous avons traité les problèmes aux limites stationnaires
- Que faire dans le cas instationnaire ?

Diffusion de la chaleur dans un fil contenu entre $[0, 1]$

$$\bullet \begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_x \left(\kappa(x) \partial_x u(x, t) \right) + \varphi(x, t), & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]0, 1[\\ u(0, t) = \alpha(t), & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(1, t) = \beta(t), & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in]0, 1[\end{cases}$$

- Considérons le cas simple $\alpha(t) = \beta(t) = \varphi(x, t) = 0$ et $\kappa(x) = 1$

$$\implies \begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t), & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in]0, 1[\end{cases}$$

- On peut introduire deux types d'opérateurs différentiels \mathcal{L} et L tels que

$$\mathcal{L} = \partial_{xx} \quad \text{et} \quad L = \partial_t - \partial_{xx}$$

- L'EDP peut alors se réécrire de deux manières

$$\partial_t u(x, t) = \mathcal{L} u(x, t) \quad \text{et} \quad L u(x, t) = 0$$

- Pour la discrétisation, nous allons choisir la première

Discrétisation semi-discrète

- Comme précédemment, on va utiliser un opérateur approché, ici pour \mathcal{L}

$$\mathcal{L}_h u(x, t) = \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2} \quad (2)$$

- On introduit également un maillage



- En appliquant l'opérateur (2) sur les points du maillages, et en imposant que $u_h(0, t) = u_h(1, t) = 0$, on obtient le schéma suivant :

$$\partial_t u_h(x_i, t) = \mathcal{L}_h u_h(x_i, t), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$$

- En posant $u_i(t) = u_h(x_i, t)$, on obtient le système d'EDO suivant

$$\partial_t u_i(t) = \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad (3)$$

- Ceci est un schéma de discrétisation seulement en espace, qu'on appelle aussi **schéma semi-discret**

Discrétisation totalement discrète

- On partitionne l'espace temporel en introduisant les instants $t_n = n \Delta t$
- $\Delta t = \frac{T}{N}$ est appelé le pas de temps, et on note T le temps final
- La solution numérique $u_i^n = u_h(x_i, t_n)$ est à présent l'approximation de la solution $u(x, t)$ au point x_i et à l'instant t_n
- Il suffit à présent d'appliquer une méthode numérique pour les EDO (schéma de discrétisation temporel) au système (3) pour obtenir cette solution approchée

Exemples de schémas numériques

- Euler Explicite (E.E)
$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{h^2} (u_{i+1}^n - 2 u_i^n + u_{i-1}^n)$$
- Euler Implicite (E.I)
$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2 u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})$$
- Crank-Nicolson (C-N)

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{2 h^2} (u_{i+1}^n - 2 u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2 h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2 u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})$$

Erreur de troncature et consistance

- Comme précédemment, on définit l'erreur de troncature comme

$$\tau_h(x, t) = L_h u(x, t) - L u(x, t)$$

- Si $\tau_h = O(h^p + \Delta t^q)$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur est dit consistant est précis à l'ordre p en espace et q en temps
- L'opérateur est globalement d'ordre $\alpha = \min(p, q)$

Retours aux exemples de schémas numériques

- Euler Explicite (E.E)

$$\begin{aligned} \tau_h(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2} \\ &\quad - (\partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t)), \\ &= \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x, t) + O(\Delta t^2) - \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(x, t) + O(h^4) \end{aligned}$$

Remarque

- Il se peut que l'erreur temporelle compense partiellement l'erreur en espace (exple : Lax-Wendroff)
- Pour s'assurer de l'ordre du schéma, on convertit les dérivées temporelles en dérivées spatiales

$$\bullet \quad u_t = u_{xx} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xxt} \\ u_{xxt} = u_{xxxx} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad u_{tt} = u_{xxxx}$$

Retours aux exemples de schémas numériques (voir TD)

- Euler Explicite (E.E) ordre 1 en temps et 2 en espace

$$\tau_h(x, t) = \frac{1}{2} \left(\Delta t - \frac{h^2}{6} \right) u_{tt}(x, t) + O(\Delta t^2 + h^4) = O(\Delta t + h^2)$$

- Euler Implicite (E.I) ordre 1 en temps et 2 en espace

$$\begin{aligned} \tau_h(x, t) &= \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x, t) - \Delta t u_{xxt}(x, t) - \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(x, t) + O(\Delta t^2 + h^4) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\Delta t + \frac{h^2}{6} \right) u_{tt} + O(\Delta t^2 + h^4) = O(\Delta t + h^2) \end{aligned}$$

Remarque

- On remarque que, pour le schéma $D_0^{(2)} - E.E$, dans le cas particulier où $\Delta t = \frac{h^2}{6}$, la méthode est alors d'ordre 2 en temps et 4 en espace
- De plus, comme $\Delta t \sim h^2$, l'erreur se comportera donc comme $O(h^4)$
- On a mis ici en évidence un phénomène de superconvergence

Vérification de superconvergence

- On va vérifier ce phénomène en calculant les taux de convergence
- On prend pour donnée initiale $u_0(x) = \sin(\pi x)$
- On sait dans ce cas simple calculer la solution exacte

$$u(x, t) = \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}$$

- On calcule la solution numérique jusqu'à $t = 0.2$

Solutions exacte et numérique pour $\Delta t = h^2/6$

Taux de convergence pour $\Delta t = h^2/8$

	L_1		L_2		L_∞	
h	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$	$E_{L_\infty}^h$	$q_{L_\infty}^h$
$\frac{1}{10}$	3.61E-4	2.01	4.04E-4	2.01	5.71E-4	2.01
$\frac{1}{20}$	8.99E-5	2.00	1.00E-4	2.00	1.41E-4	2.00
$\frac{1}{40}$	2.24E-5	2.00	2.49E-5	2.00	3.52E-5	2.00
$\frac{1}{80}$	5.60E-6	2.00	6.23E-6	2.00	8.81E-6	2.00
$\frac{1}{160}$	1.40E-6	-	1.56E-6	-	2.20E-6	-

Taux de convergence pour $\Delta t = h^2/6$

	L_1		L_2		L_∞	
h	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$	$E_{L_\infty}^h$	$q_{L_\infty}^h$
$\frac{1}{10}$	3.15E-6	4.01	3.53E-6	4.01	4.99E-6	4.01
$\frac{1}{20}$	1.97E-7	4.00	2.19E-7	4.00	3.10E-7	4.00
$\frac{1}{40}$	1.23E-8	4.00	1.37E-8	4.00	1.93E-8	4.00
$\frac{1}{80}$	7.69E-9	4.00	8.54E-9	4.00	1.21E-9	4.00
$\frac{1}{160}$	4.82E-10	-	5.35E-10	-	7.58E-10	-

Retours aux exemples de schémas numériques (voir TD)

- Crank-Nicolson (C-N)

ordre 2 en temps et 2 en espace

$$\begin{aligned}
 \tau_h(x, t) &= \frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt} - \frac{\Delta t}{2} u_{xxt} - \frac{\Delta t^2}{4} u_{xxtt} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + O(\Delta t^3 + h^4) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\underbrace{\Delta t - \Delta t}_{=0} + \frac{h^2}{6} \right) u_{tt} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t^2}{3} - \frac{\Delta t^2}{2} \right) u_{ttt} + O(\Delta t^3 + h^4) \\
 &= -\frac{h^2}{12} u_{tt} - \frac{\Delta t^2}{12} u_{ttt} + O(\Delta t^3 + h^4) \\
 &= O(\Delta t^2 + h^2)
 \end{aligned}$$

Stabilité et convergence

- Comme précédemment, pour analyser la convergence d'un schéma, il est nécessaire d'étudier sa stabilité
- Les instabilités dans les calculs se manifestent par l'apparition d'oscillations non-bornées de la solution

Stabilité

- Un schéma aux différences finies est dit stable pour la norme $\| \cdot \|$ s'il existe deux constantes $K > 0$ et α indépendantes de h et Δt (lorsque ces valeurs tendent vers 0) tel que

$$\| \mathbf{U}_h^n \| \leq K e^{\alpha t_n} \| \mathbf{U}_h^0 \|,$$

où $\mathbf{U}_h^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_m^n)^t$

Stabilité en temps longs (*Time stable*)

- Un schéma aux différences finies est dit stable en temps longs pour la norme $\| \cdot \|$ s'il existe une constante $K > 0$ indépendante de h et Δt (lorsque ces valeurs tendent vers 0) tel que

$$\| \mathbf{U}_h^n \| \leq K \| \mathbf{U}_h^0 \|.$$

Remarque

- Si ces inégalités ne sont vraies que sous certaines contraintes sur h et Δt , on dit que le schéma est **conditionnellement** stable

Stabilité des schémas linéaires à deux niveaux

- On considère un schéma linéaire à deux niveaux de la forme

$$\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h^n$$

- On obtient immédiatement que $\mathbf{U}_h^n = (\mathbf{A}_h)^n \mathbf{U}_h^0$
- En utilisant une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_h^n\| &\leq \|(\mathbf{A}_h)^n\| \|\mathbf{U}_h^0\| \\ &\leq \|\mathbf{A}_h\|^n \|\mathbf{U}_h^0\| \end{aligned}$$

- Pour la stabilité, on voudra donc que $\|\mathbf{A}_h\|^n \leq K e^{\alpha t_n}$

- En pratique, on cherchera en particulier à montrer que

$$\|\mathbf{A}_h\| \leq e^{\alpha \Delta t}$$

- Pour la stabilité en temps longs, on voudra donc que $\|\mathbf{A}_h\|^n \leq K$

- En pratique, on cherchera en particulier à montrer que

$$\|\mathbf{A}_h\| \leq 1$$

Rapport entre erreur de troncature et erreur globale

- On considère un schéma à deux niveaux pour l'EDP $Lu(x, t) = 0$

$$\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h^n$$

- L'erreur de troncature $\boldsymbol{\tau}^n = (\tau(x_1, t_n), \dots, \tau(x_m, t_n))^t$ se réécrit

$$\begin{aligned} \Delta t \boldsymbol{\tau}^n &= \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{A}_h \mathbf{U}^n - \mathbf{0} \\ &= \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{A}_h \mathbf{U}^n - (\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h^n) \\ &= \boldsymbol{\epsilon}^{n+1} - \mathbf{A}_h \boldsymbol{\epsilon}^n \end{aligned}$$

- On rappelle que $\boldsymbol{\epsilon}^n = \mathbf{U}_h^n - \mathbf{U}^n$
- Par récurrence, on obtient que

$$\boldsymbol{\epsilon}^n = (\mathbf{A}_h)^n \boldsymbol{\epsilon}^0 + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{A}_h)^k \boldsymbol{\tau}^{n-1-k}$$

- Sous l'hypothèse qu'on ne fait pas d'erreur à l'initialisation, *i.e.* $\mathbf{U}_h^0 = \mathbf{U}^0$

$$\|\boldsymbol{\epsilon}^n\| \leq \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{A}_h\|^k \|\boldsymbol{\tau}^{n-1-k}\|$$

Rapport entre erreur de troncature et erreur globale

- On obtient donc l'inégalité suivante

$$\|\epsilon^n\| \leq \Delta t \max_{k \in [1, n]} (\|\tau^k\|) \sum_{k=0}^{n-1} \|A_h\|^k$$

- Sous l'hypothèse que $\|A_h\|^n \leq K e^{\alpha t_n}$, on obtient que

$$\begin{aligned} \|\epsilon^n\| &= K t_n e^{\alpha t_n} \max_{k \in [1, n]} (\|\tau^k\|) \\ &\leq \underbrace{K T e^{\alpha T}}_{C_T} \max_{k \in [1, n]} (\|\tau^k\|) \end{aligned}$$

- Pour un schéma consistant tel que $\|\tau^k\| = O(h^p + \Delta t^q)$, on a alors que

$$\|\epsilon^n\| = O(h^p + \Delta t^q)$$

- La solution approchée converge donc vers la solution exacte

Cas général avec $\varphi(x, t)$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ *Euler-Explicite*

- Considérons le cas général avec terme source et conditions aux bords
- Prenons l'exemple d'un schéma explicite à deux niveaux de la forme

$$\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h^n + \Delta t (\mathbf{F}^n + \mathbf{B}_c^n)$$

- Avec $\mathbf{F}^n = (\varphi(x_1, t_n), \dots, \varphi(x_m, t_n))^t$ le terme source à l'instant t_n
- Et \mathbf{B}_c^n la contribution de $\alpha(t_n)$ et $\beta(t_n)$
- Dans ce cas, la condition de stabilité s'écrit

$$\|\mathbf{U}_h^n\| \leq K e^{\alpha t_n} \left(\|\mathbf{U}_h^0\| + \|\mathbf{F}\|_{t_{n-1}} + \|\mathbf{B}_c\|_{t_{n-1}} \right),$$

- En définissant la norme $\|\mathbf{F}\|_{t_p} = \Delta t \sum_{k=0}^p \|\mathbf{F}^k\|$

Condition de stabilité dans le cas général

Euler-Explicite

- La condition $\|A_h\|^n \leq K e^{\alpha t_n}$ permet à nouveau d'assurer la stabilité

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h^n &= A_h \mathbf{U}_h^{n-1} + \Delta t \left(\mathbf{F}^{n-1} + \mathbf{B}_c^{n-1} \right) \\ &= (A_h)^n \|\mathbf{U}_h^0\| + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} (A_h)^k \left(\mathbf{F}^{n-1-k} + \mathbf{B}_c^{n-1-k} \right) \end{aligned}$$

- On retrouve alors la condition de stabilité

$$\|\mathbf{U}_h^n\| \leq K e^{\alpha t_n} \left(\|\mathbf{U}_h^0\| + \|\mathbf{F}\|_{t_{n-1}} + \|\mathbf{B}_c\|_{t_{n-1}} \right)$$

- Pour le rapport entre les erreurs, on retrouve la même relation

$$\begin{aligned} \Delta t \tau^n &= \mathbf{U}^{n+1} - A_h \mathbf{U}^n - \Delta t \mathbf{B}_c^n - \mathbf{F}^n \\ &= \mathbf{U}^{n+1} - A_h \mathbf{U}^n - \Delta t \mathbf{B}_c^n - \left(\mathbf{U}_h^{n+1} - A_h \mathbf{U}_h^n - \Delta t \mathbf{B}_c^n \right) \\ &= \epsilon^{n+1} - A_h \epsilon^n \end{aligned}$$

- Tout cela s'applique, avec de légères modifications, aux autres schémas temporels introduits (E.I, C-N, ...)

Étude de stabilité

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E

- On considère à nouveau le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t), & \forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in]0, 1[\end{cases}$$

- Étudions tout d'abord la stabilité du schéma défini par

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$$

- On impose que $u_0^n = u_{m+1}^n = 0, \forall n$
- On met ce système sous forme matrice-vecteur

$$\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h^n$$

Étude de stabilité - suite

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E

- En introduisant $\lambda = \frac{\Delta t}{h^2} > 0$, la matrice de discrétisation s'écrit

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

- Étudions tout d'abord la stabilité L_∞
- On peut ici simplement calculer $\|A_h\|_\infty = \max_{i \in [1, m]} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ et obtenir

$$\begin{aligned} \|A_h\|_\infty &= |1 - 2\lambda| + 2\lambda \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda \leq \frac{1}{2} \\ 4\lambda - 1 > 1, & \text{si } \lambda > \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Étude de stabilité - suite

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E

- La méthode sera donc stable L_∞ sous la condition que

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{2}$$

- On appelle cette contrainte la **condition CFL** (Courant-Friedrichs-Lewy)
- Une autre façon de s'assurer de la stabilité L_∞ est de vérifier le principe de maximum discret

Principe du Maximum Discret (PMD)

- Un schéma DF vérifie le PMD si $\forall n \in \mathbb{N}^+$ et $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$\min_{j \in \llbracket 0, m+1 \rrbracket} u_j^0 \leq u_i^n \leq \max_{j \in \llbracket 0, m+1 \rrbracket} u_j^0$$

Remarque

- Le PMD donne donc la stabilité L_∞
- Il permet également de s'assurer de la préservation des bornes de la solution (pas de création de nouveaux extrema globaux)

Étude de stabilité - suite

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E

- Voyons à présent si le schéma vérifie le PMD

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ &= (1 - 2\lambda) u_i^n + \lambda u_{i+1}^n + \lambda u_{i-1}^n \end{aligned}$$

- On voit donc que si $1 - 2\lambda \geq 0$, la solution u_i^{n+1} s'écrit comme une combinaison convexe de u_{i-1}^n , u_i^n et u_{i+1}^n
- Par conséquent, si $\Delta t \leq \frac{h^2}{2}$, on a immédiatement que

$$\min(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n) \leq u_i^{n+1} \leq \max(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$$

- Ce qui nous donne par récurrence le principe du maximum discret
- On retrouve donc que, pour $\Delta t \leq \frac{h^2}{2}$, la méthode est stable L_∞

Remarque

- De nombreux schémas ne vérifient pas le principe du maximum mais sont tout de même de bons schémas
- La stabilité L_2 est un bon critère pour étudier la pertinence des schémas

Étude de stabilité - suite

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E

- Intéressons-nous à présent à la stabilité L_2
- Comme on sait que la méthode est stable L_∞ et A_h symétrique, on a

$$\|A_h\|_2 = \rho(A_h) = \|\mathbf{P}^t A_h \underbrace{\mathbf{P}}_{\text{matrice orthogonale}}\|_\infty \leq \|\mathbf{P}^t\|_\infty \|\mathbf{P}\|_\infty \|A_h\|_\infty = \|A_h\|_\infty \leq 1,$$

- Une autre méthode sera d'utiliser le théorème de Gershgorin

$$\mathcal{S}_p \subset B_f(1 - 2\lambda, 2\lambda)$$

- De plus, comme A_h est symétrique, on arrive à la conclusion que

$$\mathcal{S}_p \subset [1 - 4\lambda, 1]$$

Étude de stabilité - suite

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E

- Donc, sous la condition $\Delta t \leq \frac{h^2}{2}$, on obtient finalement que

$$S_p \subset [1 - 4\lambda, 1] \subset [-1, 1]$$

- Par conséquent, $\|A_h\|_2 = \rho(A_h) \leq 1$, la méthode est donc bien stable L_2

Remarque

- Une autre façon de procéder est d'utiliser l'**analyse de Fourier**
- Il faut cependant faire l'hypothèse que la solution est périodique. Cette méthode sera donc suffisante pour étudier la stabilité du schéma intérieur (loin des bords), mais insuffisante pour un vrai problème aux limites

Analyse de Fourier

- Afin d'utiliser la décomposition de Fourier, on définit rigoureusement u_h

$$u_h(x, t) = u_j^n, \quad \text{si } \begin{cases} x \in [\max(x_j - \frac{h}{2}, 0), \min(x_j + \frac{h}{2}, 1)] \\ t \in [t_n, t_{n+1}[\end{cases}$$

Analyse de Fourier - suite

- La fonction u_h est donc constante par morceaux
- On fait ici l'hypothèse que u_h est périodique, de période 1 (pour $[0, 1]$)
- On peut alors décomposer $u_h(\cdot, t_n)$ en somme de Fourier

$$u_h(x, t_n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) e^{2\pi i k x}$$

- Où les moments sont définis par

$$\hat{u}^n(k) = \int_0^1 u_h(x, t_n) e^{-2\pi i k x} dx$$

Rappel sur la transformée de Fourier

- Soit deux fonctions v et w , de période 1, tel que $w(x) = v(x + L)$, alors

$$\begin{aligned} \hat{w}(k) &= \int_0^1 v(x + L) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= e^{2\pi i k L} \int_L^{1+L} v(y) e^{-2\pi i k y} dy \\ &= \hat{v}(k) e^{2\pi i k L} \end{aligned}$$

Étude de stabilité - suite

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E

- On rappelle que le schéma étudié ici s'écrit comme

$$\begin{aligned} u(x, t_{n+1}) &= u(x, t_n) + \frac{\Delta t}{h^2} (u(x+h, t_n) - 2u(x, t_n) + u(x-h, t_n)) \\ &= (1 - 2\lambda) u(x, t_n) + \lambda u(x+h, t_n) + \lambda u(x-h, t_n) \end{aligned}$$

- On va à présent appliquer la transformée de Fourier à ce schéma DF

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(k) &= (1 - 2\lambda) \hat{u}^n(k) + \lambda e^{2\pi i k h} \hat{u}^n(k) + \lambda e^{-2\pi i k h} \hat{u}^n(k) \\ &= [1 - 2\lambda (1 - \cos(2\pi k h))] \hat{u}^n(k) \\ &= \underbrace{[1 - 4\lambda \sin^2(\pi k h)]}_{\mathcal{A}(k; \Delta t, h)} \hat{u}^n(k) \end{aligned}$$

- Le terme $\mathcal{A}(k; \Delta t, h)$ s'appelle le facteur d'amplification

Facteur d'amplification et stabilité

- Si après transformée de Fourier, les moments sont liés par la relation

$$\widehat{u}^{n+1}(k) = \mathcal{A}(k; \Delta t, h) \widehat{u}^n(k)$$

- Le schéma sera stable L_2 si

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{A}(k; \Delta t, h)| \leq e^{\alpha \Delta t}$$

- Le schéma sera stable en temps longs en norme L_2 si

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{A}(k; \Delta t, h)| \leq 1$$

- Ces conditions sont appelées conditions de stabilité de von Neumann

Démonstration

- L'égalité de Parseval-Plancherel nous donne que

$$\|U_h^n\|_2^2 = h \sum_{i=1}^m (u_i^n)^2 = \int_0^1 (u_h(x, t_n))^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}^n(k)|^2$$

Démonstration - suite

- Sous la condition de stabilité de von Neumann, on a que

$$\begin{aligned} |\hat{u}^n(k)| &\leq e^{\alpha \Delta t} |\hat{u}^{n-1}(k)| \\ &\leq e^{\alpha t_n} |\hat{u}^0(k)| \end{aligned}$$

- En combinant ces deux relation, on obtient finalement que

$$\|U_h^n\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2 \leq e^{2\alpha t_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^0(k)|^2 = e^{2\alpha t_n} \|U_h^0\|_2^2$$

- Le schéma est donc bien stable L_2 , car on retrouve la condition

$$\|U_h^n\|_2 \leq e^{\alpha t_n} \|U_h^0\|_2$$

Étude de stabilité - suite

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E

- Avec la formule du facteur d'amplification obtenue précédemment, on a

$$\mathcal{A}(k; \Delta t, h) = 1 - 4\lambda \sin^2(\pi k h) \in [1 - 4\lambda, 1]$$

- On retrouve donc que le schéma est stable L_2 pour $\Delta t \leq \frac{1}{2} h^2$

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E en prenant $\Delta t = 0.4 h^2$

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E en prenant $\Delta t = 0.6 h^2$

Étude de stabilité

schéma $D_0^{(2)}$ et E.1

- Étudions à présent la stabilité du schéma implicite suivant

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2 u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})$$

- En introduisant $\lambda = \frac{\Delta t}{h^2} > 0$, ce schéma se réécrit comme suit

$$(1 + 2\lambda) u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1} - \lambda u_{i-1}^{n+1} = u_i^n$$

- On met ce système sous forme matrice-vecteur $B_h \mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{U}_h^n$, avec

$$B_h = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

Étude de stabilité - suite

schéma $D_0^{(2)}$ et E.I

- B_h est à diagonale strictement dominante, elle est donc inversible
- On obtient alors la relation suivante

$$\mathbf{U}_h^{n+1} = B_h^{-1} \mathbf{U}_h^n$$

- Afin d'étudier la stabilité du schéma, étudions $\|B_h^{-1}\|$
- Comme B_h est à diagonale dominante et inversible, avec

$$\begin{cases} b_{ii} > 0, & \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \\ b_{ij} \leq 0, & \forall i \neq j \in \llbracket 1, m \rrbracket \end{cases}$$

- La matrice B_h est bien monotone
- De plus, on a que $B_h \mathbf{1}_m = (1 + \lambda, 1, \dots, 1, 1 + \lambda)^t \geq \mathbf{1}_m$
- On conclut donc que $\|B_h^{-1}\|_\infty \leq \|\mathbf{1}_m\|_\infty = 1$
- La méthode est donc **inconditionnellement** stable L_∞

Remarque

- Le gros avantage des méthode implicite en temps est leur stabilité inconditionnelle (pas de condition sur Δt ou h)
- L'inconvénient est qu'elles sont plus complexes et coûteuses à résoudre, nécessitant l'inversion d'une matrice de taille m

Étude de stabilité - suite

schéma $D_0^{(2)}$ et E.I

- Pour la stabilité L_2 , on pourrait par exemple le théorème de Gershgorin
- On peut également utiliser l'analyse de Fourier comme suit

$$\left[1 + 2\lambda - \lambda \left(e^{2\pi i k h} + e^{-2\pi i k h} \right) \right] \hat{u}^{n+1}(k) = \hat{u}^n(k)$$

$$\iff [1 + 2\lambda (1 - \cos(2\pi k h))] \hat{u}^{n+1}(k) = \hat{u}^n(k)$$

$$\iff [1 + 4\lambda \sin^2(\pi k h)] \hat{u}^{n+1}(k) = \hat{u}^n(k)$$

- On obtient donc que

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \frac{1}{1 + 4\lambda \sin^2(\pi k h)} \hat{u}^n(k)$$

Étude de stabilité - suite

schéma $D_0^{(2)}$ et E.1

- En étudiant la facteur d'amplification, on obtient tout de suite que

$$|\mathcal{A}(k; \Delta t, h)| = \frac{1}{|1 + 4\lambda \sin^2(\pi k h)|} \leq 1$$

- Le schéma est donc inconditionnellement stable L_2

Exercices

(voir TD)

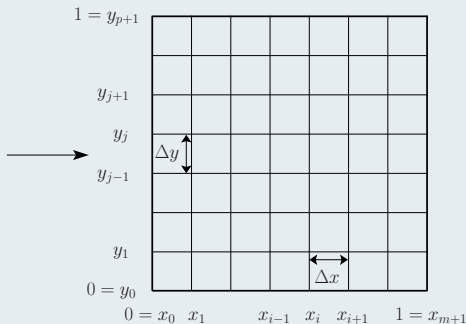
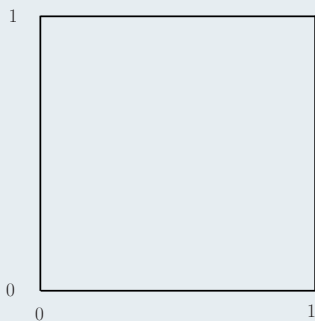
- Montrer que le schéma $D_0^{(2)}$ avec C-N est bien d'ordre 2
- Montrer que ce schéma est inconditionnellement stable

schéma $D_0^{(2)}$ et E.I en prenant $\Delta t = 0.4 h^2$

schéma $D_0^{(2)}$ et E.I en prenant $\Delta t = 10 h^2$

Diffusion de la chaleur dans une plaque contenu dans $[0, 1]^2$

- $$\begin{cases} \partial_t u(x, y, t) = \Delta u(x, y, t), & \forall (x, y) \in]0, 1[^2, \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(x, y, t) = 0, & \forall (x, y) \in \partial(]0, 1[^2), \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \forall (x, y) \in]0, 1[^2 \end{cases}$$
- Dans le cas multi-dimensionnel (2D ou 3D), la procédure est la même
- On introduit les points d'approximation $(x_i, y_j) = (i \Delta x, j \Delta y)$, où Δx et Δy sont les pas d'espace



Diffusion de la chaleur dans une plaque contenu dans $[0, 1]^2$

- On veut alors calculer la solution numérique u_h aux points (x_i, y_j) , notée

$$u_h(x_i, y_j, t_n) = u_{i,j}^n$$

- Pour ce faire, on peut par exemple utiliser le schéma $D_0^{(2)}$ avec E.E

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta t \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \Delta t \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\ &= (1 - 2(\lambda_x + \lambda_y)) u_{i,j}^n + \lambda_x u_{i+1,j}^n + \lambda_x u_{i-1,j}^n + \lambda_y u_{i,j+1}^n + \lambda_y u_{i,j-1}^n \end{aligned}$$

- On a introduit ici $\lambda_x = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ et $\lambda_y = \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$
- On voit alors que si $1 - 2(\lambda_x + \lambda_y) \geq 0$, le schéma respecte le PMD
- Par conséquent, le schéma sera stable L_∞ sous la condition CFL

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

- Dans le cas $\Delta x = \Delta y = h$, cette contrainte se réécrit $\Delta t \leq \frac{h^2}{4}$

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E avec $\Delta t = 0.49 (\Delta x^2 \Delta y^2) / (\Delta x^2 + \Delta y^2)$

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E avec $\Delta t = 0.51 (\Delta x^2 \Delta y^2) / (\Delta x^2 + \Delta y^2)$

schéma $D_0^{(2)}$ et E.I avec $\Delta t = 0.51 (\Delta x^2 \Delta y^2) / (\Delta x^2 + \Delta y^2)$

schéma $D_0^{(2)}$ et E.I avec $\Delta t = 10 (\Delta x^2 \Delta y^2) / (\Delta x^2 + \Delta y^2)$

Diffusion avec terme source et conditions aux bords mixtes

$$\bullet \begin{cases} \partial_t u(\mathbf{x}, t) = \Delta u(\mathbf{x}, t) + \varphi(u(\mathbf{x}, t)), & \forall \mathbf{x} \in]0, 1[^2, \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \alpha(\mathbf{x}, t), & \forall \mathbf{x} \in \partial(]0, 1[^2) \setminus \mathcal{F}, \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(\mathbf{x}, t) = T_{ext}, & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in]0, 1[^2 \end{cases}$$

- On va étudier l'influence de la position d'un radiateur vis à vis d'une fenêtre ouverte sur la répartition des températures d'une pièce
- On modélise la présence du radiateur par un terme source de la forme

$$\varphi(u(\mathbf{x}, t)) = (T_{rad} - u(\mathbf{x}, t))^3 \mathbf{1}_\omega$$

- Les murs ici ne permettent pas de flux de chaleur : $\alpha(\mathbf{x}, t) = 0$
- Une fenêtre ouverte, située en $\mathcal{F} = \{x = 0, y \in [0.4, 0.6]\}$, impose une température de $T_{ext} = 5^\circ\text{C}$.
- On simule ce problème avec le schéma différences finies $D_0^{(2)} - E.E$

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E avec $\varphi(u(\mathbf{x}, t)) = 0$

- Temp min :
5.00°C
- Temp max :
5.02°C
- Temp moy :
5.01°C
- Écart type :
 4.10^{-3} °C

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E avec $\omega = [0.9, 1] \times [0.4, 0.6]$

- Temp min :
5.00°C
- Temp max :
32.18°C
- Temp moy :
19.96°C
- Écart type :
4.94°C

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E avec $\omega = [0.45, 0.55] \times [0.4, 0.6]$

- Temp min :
5.00°C
- Temp max :
30.39°C
- Temp moy :
23.40°C
- Écart type :
4.19°C

schéma $D_0^{(2)}$ et E.E avec $\omega = [0, 0.1] \times [0.4, 0.6]$

- Temp min :
5.00°C
- Temp max :
26.73°C
- Temp moy :
24.50°C
- Écart type :
0.715°C

Équation d'advection

- Intéressons nous à présent au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (C)$$

- $c \in \mathbb{R}$ est la vitesse de transport

Proposition

(voir TD ou Chapitre 3)

- On considère que la donnée initiale est régulière, *i.e.* $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
- Le problème de Cauchy (C) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

$$u(x, t) = u_0(x - ct), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

Problème avec conditions initiale et aux bords

- Si on considère un domaine borné $[a, b]$, pour que le problème soit bien posé, il faudra définir la solution à l'un des bords suivant le signe de c

Proposition

(voir Chapitre 3)

- Pour $c > 0$, avec la condition au bord $u(a, t) = \alpha(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - ct), & \text{si } x \geq a + ct \\ \alpha\left(t - \frac{x - a}{c}\right), & \text{si } x \in [a, a + ct] \end{cases}$$

- Pour $c < 0$, avec la condition au bord $u(b, t) = \beta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - ct), & \text{si } x \leq b + ct \\ \beta\left(t + \frac{b - x}{c}\right), & \text{si } x \in [b + ct, b] \end{cases}$$

Schémas différences finies

- Comme précédemment, on introduit pour le domaine $[a, b]$ les points de discrétisations $\{x_i\}_{i \in \llbracket 0, m+1 \rrbracket}$ définis par $x_i = a + i \Delta x$ avec

$$\Delta x = \frac{(b - a)}{m + 1}, \text{ ainsi que les temps intermédiaires } t_n = n \Delta t$$

- On introduit les valeurs u_i^n de la solution approchée tel que $u_i^n = u_h(x_i, t_n)$

Exemples de schémas numériques

- Schéma décentré à gauche et Euler explicite

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

- Schéma décentré à droite et Euler explicite

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

- Schéma centré et Euler implicite

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})$$

- Schéma de Lax-Friedrichs

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i-1}^n + u_{i+1}^n}{2} - \frac{c \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

- Schéma de Lax-Wendroff

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2 \Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2 u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Étude de consistance et précision

- Nous allons analyser ici le schéma explicite décentré à gauche

$$\begin{aligned}\tau_h(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + c \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{\Delta x} \\ &\quad - (\partial_t u(x, t) - c \partial_x u(x, t)), \\ &= \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x, t) + O(\Delta t^2) - c \frac{\Delta x}{2} u_{xx}(x, t) + O(\Delta x^2)\end{aligned}$$

- Ici, au vu de l'EDP, on a : $u_{tt} = -c u_{xt} = c^2 u_{xx}$
- On arrive donc à l'erreur de troncature suivante

$$\tau_h(x, t) = \frac{1}{2} c (c \Delta t - \Delta x) u_{xx} + O(\Delta t^2 + \Delta x^2) = O(\Delta t + \Delta x)$$

- Donc, dans le cas général, la méthode est d'ordre 1
- Dans le cas particulier où $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ pour $c > 0$, phénomène de superconvergence (ici la solution numérique est même **exacte** !)

Étude de stabilité

- Considérons tout d'abord le cas $c > 0$
- En posant $\lambda = \frac{|c| \Delta t}{\Delta x}$, le schéma décentré à gauche avec E.E se réécrit

$$u_i^{n+1} = (1 - \lambda) u_i^n + \lambda u_{i-1}^n$$

- On voit immédiatement que si $\lambda \leq 1$, alors u_i^{n+1} s'exprime comme une combinaison convexe de u_i^n et u_{i-1}^n
- Le schéma préserve donc le PMD et est donc stable L_∞ pour $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|c|}$

- À présent, pour le cas $c < 0$
- Dans ce cas, le schéma se réécrit comme

$$u_i^{n+1} = \underbrace{(1 + \lambda)}_{>1} u_i^n - \lambda u_{i-1}^n$$

- Il devient clair que dans ce cas, le schéma est instable

Étude de stabilité

- Effectivement, prenons par exemple la donnée initiale suivante

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- En appliquant le schéma étudié, on obtient immédiatement que

$$u_{i_0}^n = (1 + \lambda)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

- L'analyse de Fourier permettrait de retrouver ces résultats (voir TD)
- Intéressons-nous à présent au schéma décentré à droite

$$u_i^{n+1} = \left(1 + \frac{c \Delta t}{\Delta x}\right) u_i^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} u_{i+1}^n$$

- À l'inverse du schéma précédemment, cette méthode sera conditionnellement stable pour $c < 0$ et instable pour $c > 0$

schéma décentré à gauche et E.E avec $c = 1$ et $\Delta t = 0.9 h$

schéma décentré à gauche et E.E avec $c = 1$ et $\Delta t = h$

schéma décentré à gauche et E.E avec $c = 1$ et $\Delta t = 1.1 h$

schéma décentré à gauche et E.E avec $c = -1$ et $\Delta t = 0.9 h$

Remarque

(voir chapitre 3)

- On a vu que pour $c > 0$, il faut choisir la méthode décentrée à gauche, alors que pour $c < 0$ il faut choisir la méthode décentrée à droite
- Ceci traduit un principe essentiel des problèmes hyperboliques : le sens de propagation des ondes
- Il faut par conséquent aller chercher l'information d'où elle provient (caractère dît **upwind**)

Schéma décentré explicite

- En rassemblant les deux schémas étudiés précédemment, on peut en construire un nouveau, stable peu importe le signe de c

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(|c| + c)}{2} (u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(c - |c|)}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n) \\
 &= \left(1 - \frac{|c| \Delta t}{\Delta x}\right) u_i^n + \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{|c| + c}{2}\right)}_{\geq 0} u_{i-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \underbrace{\left(\frac{|c| - c}{2}\right)}_{\geq 0} u_{i+1}^n
 \end{aligned}$$

Schéma décentré explicite

- On voit immédiatement que si $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|c|}$, le schéma préserve le PMD et sera donc stable L_∞ , peu importe le signe de c
- La méthode étant d'ordre 1 en espace et en temps, on peut alors conclure que

$$\sup_{\substack{n\Delta t \leq T \\ i \in [0, m+1]}} |u_i^n - u(x_i, t_n)| \leq C_T O(\Delta x + \Delta t)$$

Analyse du schéma Lax-Wendroff

- Prenons tout d'abord le schéma centré explicite, qui est d'ailleurs instable

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

- En analysant l'erreur de troncature, on peut trouver que

$$\tau(x, t) = \frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{c \Delta x^2}{6} u_{xxx} + O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$$

Analyse du schéma Lax-Wendroff

- On utilisant le fait que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, on obtient alors que

$$\tau(x, t) = \frac{c^2 \Delta t}{2} u_{xx} + O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$$

- En utilisant l'opérateur $D_0^{(2)}$ pour approcher ∂_{xx} , on arrive à

$$\tau(x, t) = \frac{c^2 \Delta t}{2} \left(D_0^{(2)} u(x, t) + O(\Delta x^2) \right) + O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$$

- En définissant l'opérateur $\tilde{L}_h u(x, t) = L_h u(x, t) - \frac{c^2 \Delta t}{2} D_0^{(2)}$, on aura

$$\tilde{\tau}(x, t) = O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$$

- L'opérateur \tilde{L}_h nous permet alors de définir le schéma de Lax-Wendroff

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2 \Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2 u_i^n + u_{i-1}^n)$$

schéma décentré et Lax-Wendroff avec $c = 1$ et $\Delta t = 0.9 h$

Remarques

- On voit qu'à la différence de la méthode décentrée, le schéma LW est d'ordre 2, et permet donc une approximation bien plus précise de la solution (moins de diffusion numérique)
- En revanche, le schéma décentré respecte le principe du maximum discret, ce qui permet de ne pas créer de nouveaux extrema. Ce n'est pas le cas de la méthode de Lax-Wendroff
- Ceci met en évidence un phénomène bien connue de l'analyse numérique des EDP hyperboliques, à savoir l'apparition d'oscillations parasites lors de l'approximation par une méthode d'ordre élevé d'une solution discontinue : **phénomène de Gibbs**