



Référentiels mobiles et dynamique des gaz

François Vilar

IMAG, Université de Montpellier
francois.vilar@umontpellier.fr

Introduction

Le concept de milieu continu est attaché à une perception “mécanicienne” de la matière, pas comparaison à une vision plus “physicienne” qui décrit la nature corpusculaire de la matière. Chaque grandeur est définie pour un ensemble suffisant de particules centrées autour du point sur lequel est attaché cette grandeur.

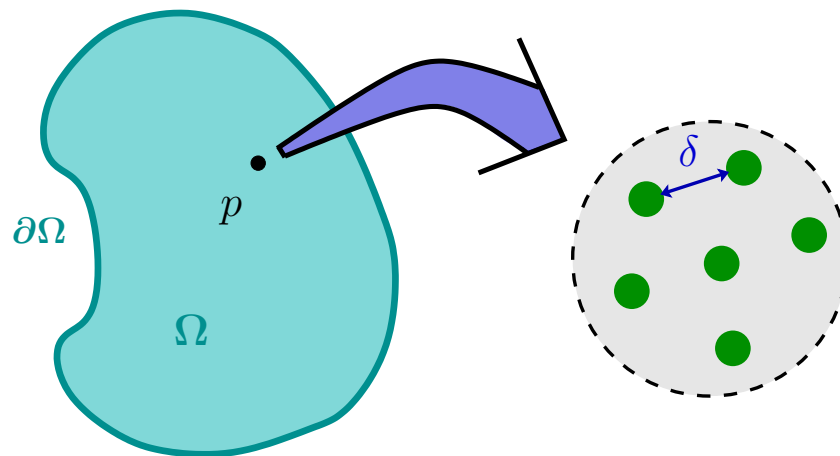


Figure 1: Mécanique des milieux continus : volume de contrôle

Considérons un volume de contrôle Ω limité par une surface $\partial\Omega$. Ce domaine Ω contient un matériau (solide ou fluide) de telle sorte que le libre parcours moyen des molécules soit très inférieur aux dimensions caractéristiques du domaine.

La description de la mécanique des milieux continus se fait généralement suivant deux types de formalisme, à savoir la description eulérienne et lagrangienne.

- La représentation lagrangienne, aussi appelée description matérielle, consiste à décrire le déplacement et la déformation du matériau en suivant le mouvement de ses particules à partir de leur position initiale. Le référentiel est alors mobile et attaché au matériau, et par conséquent va être amené à se mouvoir et se déformer au cours du temps.

Exemple : Observation d'un fleuve en suivant du regard un volume d'eau : trajectoires

- La représentation eulérienne, aussi appelée description spatiale, consiste à décrire le déplacement et la déformation à partir d'un référentiel fixe, décorrélié du matériau étudié.

Exemple : Observation d'un fleuve depuis un pont en regardant une zone fixe : lignes de courant

La représentation lagrangienne est particulièrement bien adaptée à la description de solides en grandes déformations ou de fluides subissant de grandes compressions ou détentes. De plus, comme il n'y a pas de flux de masse entre différents volumes de contrôle, cette description fournit un cadre naturel au suivi d'interfaces dans les écoulements multilatéraux. **Cependant, il faut prendre en compte la difficulté à gérer un référentiel mobile !**

On va dans ce cours s'intéresser à l'étude de ces deux formalismes dans le cadre de l'hydrodynamique des fluides compressibles non-visqueux, généralement des gaz.

1 Référentiel mobile et changement de variable

On considère $D \in \mathbb{R}^d$ ($d \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$) un domaine contenant un fluide en mouvement. L'écoulement du fluide est décrit mathématiquement par un difféomorphisme Φ tel que :

$$\begin{aligned} \Phi : D \times [0, T] &\longrightarrow \mathcal{D}(t) \\ (\mathbf{X}, t) &\longrightarrow \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}(t) = \text{Im}(\Phi(., t))$ avec t désignant le temps, et $T \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ étant l'instant final.

Remarque 1.1. Notons que pour $\mathbf{X} \in D$ fixé, la fonction $t \rightarrow \Phi(\mathbf{X}, t)$ décrit la trajectoire du point fluide initialement localisé en $\mathbf{X}$.

Il est évident que $\forall \mathbf{X} \in D, \Phi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$, ainsi que $\mathcal{D}(0) = D$. Considérons à présent $\omega(t)$ un volume de contrôle (un sous-domaine) de $\mathcal{D}(t)$. $\omega(t)$ correspond à l'image de Ω de D tel que $\omega(t) = \{\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \text{ avec } \mathbf{X} \in \Omega\}$. Il est évident que $\omega(0) = \Omega$. Les frontières de Ω et ω , respectivement $\partial\Omega$ et $\partial\omega$, admettent $\mathbf{N}$ and $\mathbf{n}$ comme normales sortantes unitaires, voir Figure 2.

Définition 1.2. Tenseur gradient de déformation

Le jacobien de la transformation définit comme

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} \Phi(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}$$

est appelé ici tenseur gradient de déformation.

Évidemment, comme $\Phi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$, on a que $\mathbf{F}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{I}_d$. Le déterminant de ce tenseur, $J = \det \mathbf{F}$, est par hypothèse strictement positif, ce qui assure le caractère isomorphe du mapping Φ .

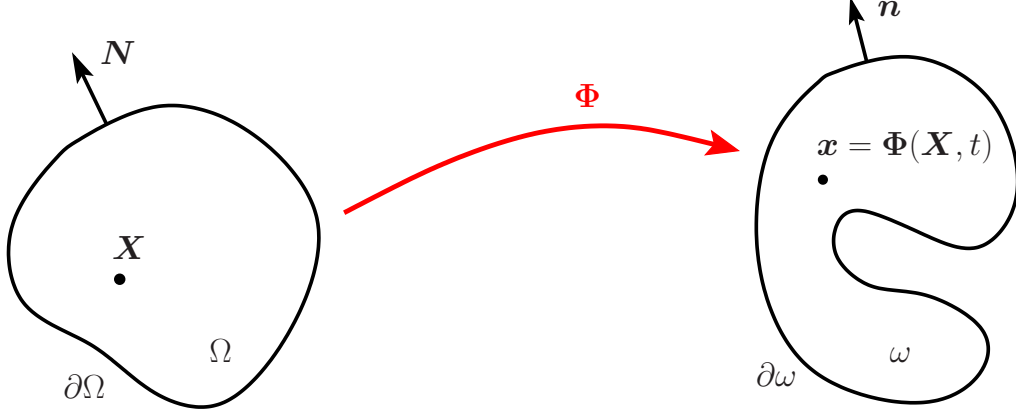


Figure 2: Mapping entre la configuration initiale et actuelle

À partir de maintenant, $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^t$ sera appelé coordonnée lagrangienne et $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$ coordonnée eulérienne. De plus, si f est une quantité fluide définie sur $\omega(t) \times [0, T]$, on notera $\tilde{f}$ sa représentation sur $\Omega \times [0, T]$, tel que :

$$\tilde{f}(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t).$$

Par simplicité, on écrit $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ pour $\Phi(\mathbf{X}, t)$ (voir définition ci-dessus). Considérons à présent des quantités fluides, respectivement scalaires et vectorielles, f et φ suffisamment régulières pour pouvoir calculer leurs dérivées partielles.

Définition 1.3. Dérivée matérielle (lagrangienne)

La dérivée matérielle $\frac{d}{dt}$ correspond à la dérivée temporelle le long d'une trajectoire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) &= \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t), \end{aligned}$$

où $\nabla_{\mathbf{x}} f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)^t$, et pour une quantité vectorielle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) &= \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \left(\nabla_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \right) \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\text{où } \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^t \text{ et } \nabla_{\mathbf{x}} \varphi = \begin{pmatrix} \partial_x \varphi_1 & \partial_y \varphi_1 & \partial_z \varphi_1 \\ \partial_x \varphi_2 & \partial_y \varphi_2 & \partial_z \varphi_2 \\ \partial_x \varphi_3 & \partial_y \varphi_3 & \partial_z \varphi_3 \end{pmatrix}.$$

On introduit à présent $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ la vitesse des points fluides telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial x(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \\ x(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}. \end{cases}$$

Ceci n'est rien d'autre que l'équation des trajectoires. Les dérivées matérielles se réécrivent alors :

$$\boxed{\frac{d f}{d t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_x f \quad \text{et} \quad \frac{d \varphi}{d t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\nabla_x \varphi) \mathbf{u}}$$

Parce que $\partial_t \mathbf{x} = \mathbf{u}$, l'évolution temporelle du tenseur $\mathbf{F}$ est gouvernée par la *Loi de Conservation Géométrique (GCL)* suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \nabla_X \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t).$$

Remarque 1.4. $\mathbf{F}$ caractérise la déformation à l'instant t . En effet, en prenant deux points voisins dans la configurations initiale $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$, à travers le mapping (l'écoulement) ces points deviennent $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ tel que :

$$d\mathbf{x} = (\nabla_X \mathbf{x}) d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}.$$

1.1 Changements de variables intégrales

Le long d'une courbe : La relation précédente nous permet d'effectuer le changement de variable intégrale dans l'intégration d'une quantité f le long d'une courbe $\mathcal{C}(t)$ tel que :

$$\int_{\mathcal{C}(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}(0)} \tilde{f}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X},$$

où

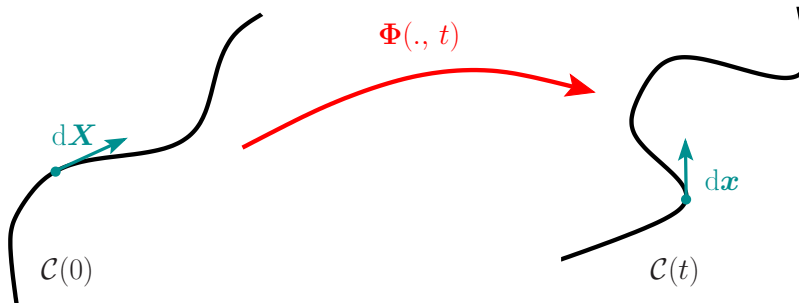


Figure 3: Mapping d'une courbe entre la configuration initiale et actuelle

Sur une surface : Soit $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_2$ deux vecteurs indépendants de Ω . On définit la surface $d\mathbf{S} = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$. Si $\mathbf{N}$ désigne la normale sortante de cette surface, on a alors $\mathbf{N} dS = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$,

où $dS = |d\mathbf{S}|$ est la mesure algébrique (l'aire) de $d\mathbf{S}$. Soient $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ les images de $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_2$ tels que $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_2$ (comme $\det \mathbf{F} = J > 0$, $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ sont également linéairement indépendants). La surface dans la configuration à l'instant t s'écrit alors $\mathbf{n} ds = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \times \mathbf{F} d\mathbf{X}_2$. En introduisant $\mathbf{F}^* = J \mathbf{F}^{-t}$, la comatrice (matrice cofactrice) de $\mathbf{F}$, on obtient (voir formulaire) :

$$\mathbf{n} ds = \mathbf{F}^* \mathbf{N} dS$$

Cette relation, appelée **formule de Nanson**, nous permet d'effectuer le changement de variable intégrale dans l'intégration d'une quantité f sur une surface $\sigma(t)$ tel que :

$$\int_{\sigma(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} ds = \int_{\sigma(0)} \tilde{f}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t) \mathbf{N} dS,$$

où

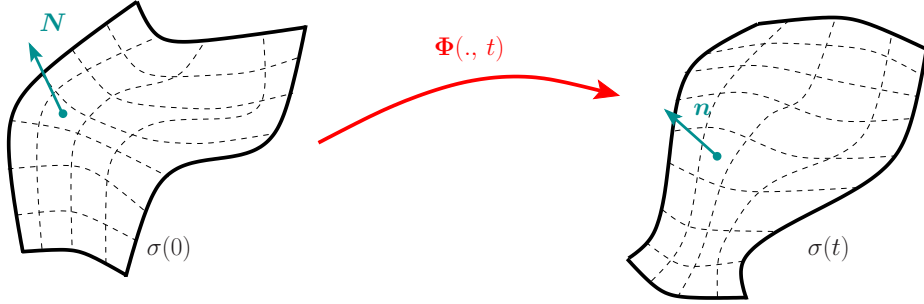


Figure 4: Mapping d'une surface entre la configuration initiale et actuelle

Dans un volume : À présent, on considère un troisième vecteur $d\mathbf{X}_3$ tel que $\{d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ avec une orientation positive. On définit alors le volume dV comme suit $dV = (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3$. Si $d\mathbf{x}_3 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_3$, on a alors la relation de volumes suivante :

$$\begin{aligned} dv &= (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3, \\ &= \mathbf{F}^* (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X}_3, \\ &= \mathbf{F}^t \mathbf{F}^* (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3, \\ &= J (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3. \end{aligned}$$

On obtient alors la relation :

$$dv = J dV$$

Cette relation nous permet d'effectuer le changement de variable intégrale dans l'intégration d'une quantité f dans un volume $\omega(t)$ tel que :

$$\int_{\omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(0)} \tilde{f}(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) dV.$$

Remarque 1.5. Si $|\omega(t)|$ représente le volume de $\omega(t)$, il suit directement que :

$$|\omega(t)| = \int_{\omega(t)} dv = \int_{\Omega} J dV,$$

En divisant par le volume initial $|\Omega|$, on voit tout suite que :

$$\frac{|\omega(t)|}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} J dV.$$

Le rapport de volume entre l'instant t et l'instant initial d'un sous-domaine $\omega(t)$ n'est rien d'autre que la valeur moyenne du Jacobien J sur $\Omega = \omega(0)$:

- si cette valeur est > 1 , le volume augmente,
- si cette valeur est < 1 , le volume diminue.

1.2 Transformation des opérateurs différentiels

Dans cette partie, nous allons définir les relations des opérateurs différentiels (gradient et divergence) entre configuration initiale et celle actuelle.

Gradient : Par simple dérivée de fonctions composées, on obtient que pour f une quantité fluide scalaire :

$$\begin{aligned} \nabla_X f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) &= \nabla_X \tilde{f}(\mathbf{X}, t), \\ &= \mathbf{F}^t \nabla_x f(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

et de manière équivalente,

$$\nabla_x f = \mathbf{F}^{-t} \nabla_X f = \frac{1}{J} \mathbf{F}^* \nabla_X f.$$

Démo :

Pour une quantité vectorielle $\boldsymbol{\varphi}$, la relation entre gradients s'écrit :

$$\nabla_X \boldsymbol{\varphi} = (\nabla_x \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{F} \quad \text{et} \quad \nabla_x \boldsymbol{\varphi} = (\nabla_X \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{F}^{-1}.$$

Démo :

Divergence : Soit $\boldsymbol{\varphi}$ une quantité vectorielle, on rappelle que : $\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = \text{tr}(\nabla \boldsymbol{\varphi})$. Il en suit que :

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot \boldsymbol{\varphi} &= \text{tr}(\nabla_x \boldsymbol{\varphi}), \\ &= \text{tr}((\nabla_X \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{F}^{-1}), \\ &= \text{tr}(\mathbf{F}^{-1} (\nabla_X \boldsymbol{\varphi})), \\ &= \mathbf{F}^{-t} : \nabla_X \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned}$$

On obtient donc la relation suivante :

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{J} \mathbf{F}^* : \nabla_X \boldsymbol{\varphi}.$$

Condition de compatibilité de Piola : En utilisant la relation intégrale dans un volume ω

$$\int_{\omega} \nabla_x \cdot \mathbf{T} \, dv = \int_{\partial\omega} \mathbf{T} \mathbf{n} \, ds,$$

où $\mathbf{T}$ est une quantité fluide tensorielle (voir formulaire), et en prenant $\mathbf{T} = \mathbf{I}_d$, on obtient que :

$$\int_{\partial\omega} \mathbf{n} \, ds = \mathbf{0}.$$

Cette équation ne dit rien d'autre que l'intégrale de la normale sur une surface fermée est nulle. En effectuant un changement de variable dans cette relation, on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}^* \mathbf{N} \, dS = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\Omega} \nabla_X \cdot \mathbf{F}^* \, dV = \mathbf{0}.$$

Ceci étant vrai pour tout volume de contrôle, il en suit que :

$$\nabla_X \cdot \mathbf{F}^* = \mathbf{0}$$

C'est ce qu'on appelle la **condition de Piola**.

Retour aux relations entre opérateurs différentiels, avec la formule de la divergence d'un produit tenseur-vecteur (voir formulaire), on a que :

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot \boldsymbol{\varphi} &= \frac{1}{J} \left(\mathbf{F}^* : \nabla_X \boldsymbol{\varphi} \right), \\ &= \frac{1}{J} \left(\nabla_X \cdot \left(\mathbf{F}^{*\text{t}} \boldsymbol{\varphi} \right) - \underbrace{\left(\nabla_X \cdot \mathbf{F}^* \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}}_{= \mathbf{0}} \right), \\ &= \frac{1}{J} \nabla_X \cdot \left(\mathbf{F}^{*\text{t}} \boldsymbol{\varphi} \right). \end{aligned}$$

De la manière, on pourrait trouver que :

$$\nabla_x f = \frac{1}{J} \nabla_X \cdot (f \mathbf{F}^*).$$

Démo :

Il est de la même manière possible de démontrer que :

$$\nabla_x \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{J} \nabla_X \cdot (\mathbf{T} \mathbf{F}^*).$$

Démo :

En résumé, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\nabla_x f &= \frac{1}{J} \nabla_X \cdot (f F^*) \\ \nabla_x \cdot \varphi &= \frac{1}{J} \nabla_X \cdot (F^{*\text{t}} \varphi) \\ \nabla_x \cdot \mathsf{T} &= \frac{1}{J} \nabla_X \cdot (\mathsf{T} F^*)\end{aligned}$$

sous réserve de la condition de Piola :

$$\nabla_X \cdot F^* = \mathbf{0}$$

Loi de Conservation Géométrique (GCL) : On a vu que : $\partial_t \mathbf{F} = \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}$. On va maintenant s'intéresser à l'équation d'évolution de son déterminant $J = \det \mathbf{F}$. On rappelle que J représente le rapport entre volume actuel et initial. Une équation d'évolution sur J permettrait de mieux comprendre l'évolution temporelle de n'importe quel volume de contrôle. En partant de $J = \det \mathbf{F}$ et en utilisant le formulaire, on obtient tout de suite que :

$$\frac{\partial J(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t},$$

où $\left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}}\right)_{ij} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}_{ij}}$. En utilisant la formule de développement du déterminant par la i^e ligne,

$$J = \sum_{j=1}^d (-1)^{i+j} \mathbf{F}_{ij} \det(\mathcal{F}_{i,j}),$$

où $\mathcal{F}_{i,j} \in \mathcal{M}_{d-1}$ est la matrice $\mathbf{F}$ à laquelle on a ôté la i^e ligne et j^e colonne. Il en suit que :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}_{ij}} = (-1)^{i+j} \det(\mathcal{F}_{i,j}) = (\mathbf{F}^*)_{ij}.$$

On a donc que : $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{F}^*$. L'équation d'évolution du jacobien se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \mathbf{F}^* : \nabla_X \mathbf{u}, \\ &= \nabla_X \cdot (\mathbf{F}^{*t} \mathbf{u}) - \underbrace{(\nabla_X \cdot \mathbf{F}^*) \cdot \mathbf{u}}_{=0}, \\ &= \nabla_X \cdot (\mathbf{F}^{*t} \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Et en utilisant la transformation du gradient, on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \nabla_x \cdot \mathbf{u}.$$

En résumé, la GCL s'écrit dans les deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{X}, t)}{\partial t} &= \nabla_X \cdot (\mathbf{F}^{*t}(\mathbf{X}, t) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)) \\ \frac{\partial J(\mathbf{X}, t)}{\partial t} &= J(\mathbf{X}, t) \nabla_x \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \end{aligned}$$

Si on veut à présent calculer la variation temporelle de $|\omega(t)|$, on fait :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} dv &= \int_{\Omega} \frac{\partial J(\mathbf{X}, t)}{\partial t} dV, \\ &= \int_{\Omega} J(\mathbf{X}, t) \nabla_x \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) dV, \\ &= \int_{\omega(t)} \nabla_x \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dv. \end{aligned}$$

Au final, la variation temporelle d'un volume est gouvernée par l'équation :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} dv = \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds.$$

Formule de transport de Reynolds : La formule de transport de Reynolds décrit la dérivée temporelle de l'intégrale d'une fonction dépendant du temps, sur un volume variant également dans le temps. En considérant f et $\boldsymbol{\varphi}$, deux quantités fluides respectivement scalaire et vectorielle, les formules de transport s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dv &= \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x \cdot (f \mathbf{u}) \right) dv, \\ &= \int_{\omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\omega(t)} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds, \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) dv &= \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\boldsymbol{\varphi} \otimes \mathbf{u}) \right) dv, \\ &= \int_{\omega(t)} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} dv + \int_{\partial\omega(t)} \boldsymbol{\varphi} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds, \end{aligned}$$

Démo :

Démo :

2 Lois de conservation physiques

On va introduire ici les lois de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale pour un fluide en mouvement, et cela dans les formalismes eulérien et lagrangiens.

2.1 Conservation de la masse

En l'absence de source ou de puit de matière, la masse contenue dans un volume de contrôle $\omega(t)$, transporté par l'écoulement, est conservé au cours du temps :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dv = 0, \quad (1)$$

où ρ est la densité du fluide. Par changement de variable, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \tilde{\rho}(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) dv = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout volume de contrôle, la version locale de cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho}(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t)) &= 0 \\ \tilde{\rho}(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) &= \rho_0(\mathbf{X}) \\ \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) &= \rho_0(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

où $\rho_0 > 0$ est la densité initiale du fluide : $\rho(\mathbf{X}, 0) = \rho_0(\mathbf{X})$. En repartant de (1), la formule de transport de Reynolds donne :

$$\int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dv = 0.$$

La version locale de cette équation donne la conservation de la masse en formalisme **eulérien** :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla_x \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0.$$

Cette loi de conservation de masse eulérienne est également appelée équation de continuité. Ici, la dépendance à la configuration initiale, via la coordonnée lagrangienne $\mathbf{X}$, n'apparaît plus. En développant $\partial_t (\tilde{\rho} J) = 0$, on peut obtenir le pendant lagrangien de cette équation :

$$\rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \frac{d}{dt} \tau(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) - \nabla_x \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = 0,$$

où $\tau = \frac{1}{\rho}$ est appelé le volume spécifique.

Démo :

Cette équation exprime la conservation de la masse dans le formalisme **lagrangien dît mobile**, car la dérivée matérielle $\frac{d}{dt}$ nous impose de suivre les trajectoires $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Un autre formalisme lagrangien existe, le **lagrangien dît total**, dans lequel tout est exprimé en fonction de la coordonnée initiale $\mathbf{X}$:

$$\rho_0(\mathbf{X}) \frac{\partial \tilde{\tau}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \left(\mathbf{F}^{*t}(\mathbf{X}, t) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \right) = 0.$$

Cette équation exprime donc la conservation de la masse dans le formalisme **lagrangien total**.

Démo :

2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Le fluide contenu dans un volume de contrôle $\omega(t)$ se déplace sous l'action de deux types de forces extérieures :

- les forces volumiques, définies en tout point $\mathbf{x}$ de $\omega(t)$. Par exemple, $\mathbf{P} = \rho \mathbf{g}$, l'action de la gravité
- les forces de contact exercées sur la frontière $\partial\omega(t)$ par le fluide extérieur à $\omega(t)$. Ces forces, appelées contraintes, sont caractérisées par une densité superficielle $\mathbf{t}$ définie en tout point de $\partial\omega(t)$ par $\mathbf{t} = \Sigma \mathbf{n}$, où Σ est le tenseur des contraintes, aussi appelé tenseur de Cauchy.

L'énoncé fondamentale de la dynamique nous dit alors, pour un milieu continu, que :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dv = \underbrace{\int_{\omega(t)} \mathbf{P} dv}_{\text{forces volumiques}} + \underbrace{\int_{\partial\omega(t)} \mathbf{t} ds}_{\text{forces de contact}} .$$

Et dans le cas d'un fluide dit classique, $\mathbf{P} = \rho \mathbf{g}$, ainsi que :

$$\Sigma = -p \mathbf{I}_d + \lambda (\nabla_x \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}_d + 2\mu \mathbf{S},$$

où p est la pression du fluide, et $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^t)$ le tenseur taux de déformation (gradient symétrique), avec λ et μ les coefficients de viscosité du fluide. Dans le cas d'un gaz, on peut négliger les effets de la gravité et de viscosité. On obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{u} dv = - \int_{\partial\omega(t)} p \mathbf{n} ds. \quad (2)$$

En utilisant la formule de transport de Reynolds, la version locale de cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}_d) = \mathbf{0}.$$

Cette équation exprime la conservation de la quantité de mouvement dans le **formalisme eulérien**.

Démo :

Pour écrire cette loi de conservation dans les formalismes lagrangiens, remarquons d'abord que, pour tout quantité fluide f suffisamment régulière :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{d f(\mathbf{x}, t)}{dt} \, dv. \quad (3)$$

Démo :

En repartant de (2) et en utilisant (3), on obtient alors que :

$$\int_{\omega(t)} \left(\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla_x p \right) dv = \mathbf{0}.$$

Cette équation étant vraie pour tout volume de contrôle $\omega(t)$, la version locale de cette dernière s'écrit :

$$\rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \nabla_x p(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{0}.$$

C'est la conservation de quantité de mouvement en formalisme **lagrangien mobile**. Le pendant **lagrangien total** est lui :

$$\rho_0(\mathbf{X}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \nabla_X \cdot \left(\tilde{p}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t) \right) = \mathbf{0}.$$

Démo :

2.3 Conservation de l'énergie totale

L'énergie totale E d'un système est la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique :

$$E = \rho e = \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}\|_2^2,$$

où e est l'énergie totale spécifique, et ε l'énergie interne spécifique. D'après le premier principe de la thermodynamique, l'énergie totale se conserve. Cependant, des échanges entre énergie interne et énergie cinétique peuvent se faire par transferts thermiques (flux de chaleur) et transferts mécaniques (travail des forces). Par conséquent, en négligeant les sources et flux de chaleur, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(t)} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} dv + \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} ds.$$

Sous les même hypothèses que précédemment ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$ et $\Sigma = -p \mathbf{l}_d$), on obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho e \, dv = - \int_{\partial\omega(t)} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (4)$$

Comme précédemment, par formule de transport de Reynolds, la version locale de cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla_x \cdot \left((\rho e + p) \mathbf{u} \right) = 0.$$

Cette équation exprime la conservation de l'énergie totale dans le **formalisme eulérien**.

Démo :

La conservation de l'énergie totale dans les formalismes lagrangiens s'écrit :

$$\rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \frac{d}{dt} e(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \nabla_x \cdot \left(p(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \right) = 0.$$

en **lagrangien mobile**,

$$\rho_0(\mathbf{X}) \frac{\partial \tilde{e}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \nabla_X \cdot \left(\mathbf{F}^{*t}(\mathbf{X}, t) \tilde{p}(\mathbf{X}, t) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \right) = 0.$$

en **lagrangien total**.

En résumé, le système d'équations modélisant la dynamique des gaz compressibles en formalisme eulérien s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}_d) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla_x \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) &= 0\end{aligned}$$

Ce système se nomme **système d'Euler**. Ici, toutes les quantités fluides sont fonctions de $\mathbf{x}$ et t .

Le système de la dynamique des gaz en formalisme lagrangien mobile s'écrit lui :

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\tau}{dt} - \nabla_x \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla_x p &= \mathbf{0} \\ \rho \frac{de}{dt} + \nabla_x \cdot (p \mathbf{u}) &= 0\end{aligned}$$

Ici, toutes les quantités fluides sont fonctions de $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ et t . Ce système doit donc être complété par l'équation des trajectoires :

$$\begin{cases} \frac{\partial x(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t), \\ x(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}, \end{cases}$$

et la définition de la dérivée matérielle de fonctions scalaire et vectorielle f et φ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \cdot \nabla_x f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t), \\ \frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) + \left(\nabla_x \varphi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t). \end{cases}$$

Pour finir, le système d'équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique des gaz compressibles en formalisme lagrangien total s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} &= \nabla_X \tilde{\mathbf{u}} \\ \rho_0 \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t} - \nabla_X \cdot (\mathbf{F}^{*t} \tilde{\mathbf{u}}) &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla_X \cdot (\tilde{p} \mathbf{F}^*) &= \mathbf{0} \\ \rho_0 \frac{\partial \tilde{e}}{\partial t} + \nabla_X \cdot (\mathbf{F}^{*t} \tilde{p} \tilde{\mathbf{u}}) &= 0\end{aligned}$$

Ici, toutes les quantités fluides sont fonctions de $\mathbf{X}$ et t .

2.4 Fermeture thermodynamique

En l'état, nous avons plus d'inconnues que d'équations. Pour fermer ces systèmes, nous allons considérer une équation d'état sur la pression : $p = p(\rho, \varepsilon)$. Par exemple, la loi d'état des gaz parfaits (qui est généralement utilisée) donne :

$$p = \rho(\gamma - 1)\varepsilon,$$

où $\gamma > 1$ est l'indice polytropique du gaz.

2.5 Analyse des valeurs propres et du caractère hyperbolique

Dans cette section, nous allons calculer les valeurs du jacobien du système, et s'assurer que le système de la dynamique des gaz est bien strictement hyperbolique, en vérifiant que toutes ses valeurs propres sont bien réelles et distinctes. Afin de rester le plus simple possible, nous allons analyser le système mono-dimensionnel (en une dimension d'espace, *i.e.* $d = 1$) dans sa forme lagrangienne mobile :

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{G}(\mathbf{V}) = 0,$$

avec $\mathbf{V} = (\tau, u, e)^t$ le vecteur variable, et $\mathbf{G} = (-u, p, pu)^t$ le vecteur flux. Ce système se réécrit en forme dite non-conservative comme suit :

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{V} + \mathbf{A}(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0,$$

où la jacobienne du système $\mathbf{A}$ est définie comme $\mathbf{A}(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{G}(\mathbf{V})$.

Remarque 2.1. *Le système sera hyperbolique si toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont réelles (et distinctes pour le caractère strictement hyperbolique).*

La jacobienne du système s'écrit comme :

$$A(V) = -\frac{(\gamma-1)}{\tau} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tau}{\gamma-1} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\tau} & u & -1 \\ \frac{u\varepsilon}{\tau} & u^2 - \varepsilon & -u \end{pmatrix}.$$

Démo :

En définissant la vitesse du son dans le fluide considéré $a = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon}$, on peut montrer que les trois valeurs propres de la jacobienne sont :

$$\mathcal{S}p(A) = \{ -\rho a, 0, \rho a \}.$$

On peut donc conclure que sous l'hypothèse que $\varepsilon > 0$ (ce qui est physiquement le cas), le système de la dynamique des gaz 1D est bien **strictement hyperbolique**.

Démo :

Si dans le cas lagrangien les valeurs propres sont $\{-\rho a, 0, \rho a\}$, dans le cas eulérien elles deviennent :

$$\{u - a, u, u + a\}.$$

Remarque 2.2. *Il est clair que, vu que le référentiel ne suit plus les trajectoires (référentiel fixe indépendant du mouvement du fluide), le terme “+u” s’ajoute aux valeurs propres. Le terme “ρ” en lagrangien provient lui du ρ devant $\frac{dV}{dt}$.*

3 Schémas Volumes Finis (VF)

Dans cette section, nous allons présenter certains schémas volumes finis, que ce soit pour le formalisme lagrangien qu'eulérien.

3.1 Schémas lagrangiens

Avant de débiter la discrétisation, notons que, dans le cas mono-dimensionnel, les deux systèmes lagrangiens, à savoir mobile et total, peuvent être mis sous un seul, grâce à l'introduction d'une nouvelle variable. Effectivement, grâce à la conservation de la masse $\tilde{\rho} J = \rho_0$, on a que :

$$\int_{\omega(t)} f(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega} \tilde{f}(X, t) \tilde{\rho}(X, t) J(X, t) dX = \int_{\Omega} \tilde{f}(X, t) \rho_0(X) dX.$$

Maintenant, comme dans le cas mono-dimensionnel $F = \partial_X x = J$, et donc $dx = J dX$, on a alors :

$$\rho(x, t) dx = \rho_0(X) dX.$$

Pour uniformiser les formalismes lagrangiens, introduisons la variable de masse suivante :

$$\tilde{\mu} : \Omega = [X_d, X_f] \longrightarrow [0, m_{\Omega}]$$

$$X \longrightarrow \tilde{\mu}(X) = \int_{X_d}^X \rho_0(Y) dY$$

où $m_{\Omega} = \int_{X_d}^{X_f} \rho_0(Y) dY$. Comme $\rho_0 > 0$, $\tilde{\mu}$ est bien un isomorphisme. Il en suit tout suite que :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(X) &= \int_{X_d}^X \rho_0(Y) dY, \\ &= \int_{X_d}^X \rho(x(Y, t), t) J(Y, t) dY, \\ &= \int_{x(X_d, t)}^{x(X, t)} \rho(y, t) dy, \\ &= \int_{x_d}^x \rho(y, t) dy, \\ &= \mu(x, t). \end{aligned}$$

Il devient alors évident que, $\forall t \geq 0$, $\mu(x(X, t), t) = \tilde{\mu}(X) = \mu(X, 0)$. Cette égalité implique que :

$$\frac{d\mu(x, t)}{dt} = 0.$$

Par définition de μ , on voit aussi que :

$$\frac{\partial \mu(x, t)}{\partial x} = \rho(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{d\tilde{\mu}(X)}{dX} = \rho_0(X).$$

On introduit à présent la notation suivante :

$$\widehat{f}(\mu, t) = f(x, t) = \widetilde{f}(X, t).$$

Il en suit directement que :

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \rho(x, t) \frac{\partial \widehat{f}(\mu, t)}{\partial \mu}$$

$$\frac{\partial \widetilde{f}(X, t)}{\partial X} = \rho_0(X) \frac{\partial \widehat{f}(\mu, t)}{\partial \mu}$$

$$\frac{\partial \widehat{f}(\mu, t)}{\partial t} = \frac{d f(x, t)}{dt} = \frac{\partial \widetilde{f}(X, t)}{\partial t}$$

Démo :

C'est la raison pour laquelle les deux systèmes de la dynamique des gaz lagrangienne se réduisent au même système suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{V}(\mu, t) + \frac{\partial}{\partial \mu} G(\widehat{V}(\mu, t)) = 0,$$

avec, comme précédemment, $\widehat{V} = (\widehat{\tau}, \widehat{u}, \widehat{e})^t$ le vecteur de variables *masse-conservatives*, et le vecteur flux $G(V) = (-u, p, pu)^t$.

Démo :

À présent, afin d'introduire la valeur moyenne massique, on définit la mesure de masse telle que :

$$d\mu = \rho(x, t) dx = \rho_0(X) dX.$$

Démo :

Donc, en introduisant un volume de contrôle $\omega(t) = [a(t), b(t)]$ avec $\Omega = [a(0), b(0)] = [A, B]$, on pose l'intervalle massique :

$$\Theta = [\widetilde{\mu}(A), \widetilde{\mu}(B)] = [\mu(A, t), \mu(B, t)].$$

Il en suit alors que :

$$\int_{\Theta} \widehat{f}(\mu, t) d\mu = \int_{\omega(t)} f(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega} \widetilde{f}(X, t) \rho_0(X) dX.$$

Retour aux schémas Volumes Finis (VF)

On veut à présent calculer une solution approchée V_h de $\widehat{V}(\mu, t)$ du système

$$\partial_t \widehat{V} + \partial_\mu G(\widehat{V}) = 0. \quad (5)$$

Pour ce faire, nous allons utiliser un schéma VF. Introduisons pour cela le maillage. En considérant le domaine $\Omega = [X_d, X_f]$ dans la configuration initiale, on partitionne ce domaine en N_m mailles comme suit :

$$[X_d, X_f] = \bigcup_{i=1}^{N_m} \underbrace{[X_{i-\frac{1}{2}}, X_{i+\frac{1}{2}}]}_{\Omega_i},$$

avec $|\Omega_i| = \Delta X_i = X_{i+\frac{1}{2}} - X_{i-\frac{1}{2}}$ la taille de la maille i . Le domaine Ω et les mailles Ω_i qui le constituent sont transportés par l'écoulement et deviennent respectivement $\omega(t) = [x_d, x_f]$, où $x_{d/f} = x(X_{d/f}, t)$, et $\omega_i(t) = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, où $x_{i\pm\frac{1}{2}} = x(X_{i\pm\frac{1}{2}}, t)$. Chaque point (interface) $x_{i+\frac{1}{2}}(t)$ du maillage est transporté par la vitesse du fluide $u_{i+\frac{1}{2}}^*$, quantité restant à définir. De manière similaire aux variables spatiales, on définit le domaine et les mailles en variable de masse, tels que : $\Theta = [0, m_\Omega]$, où $m_\Omega = \tilde{\mu}(X_f) = \mu(x_f, t)$ est la masse totale contenue dans le domaine, et $\Theta_i = [\mu_{i-\frac{1}{2}}, \mu_{i+\frac{1}{2}}]$, où $\mu_{i\pm\frac{1}{2}} = \tilde{\mu}(X_{i\pm\frac{1}{2}}) = \mu(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)$. En lagrangien, chaque maille ω_i possède une masse m_i constante au cours du temps. Cette dernière est définie de manières équivalentes comme :

$$m_i = \mu_{i+\frac{1}{2}} - \mu_{i-\frac{1}{2}} = |\Theta_i| = \int_{\Theta_i} d\mu = \int_{\omega_i(t)} \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_i} \rho_0(X) dX.$$

Définissons à présent la valeur moyenne massique.

Définition 3.1. Valeur moyenne massique

La valeur moyenne massique d'une fonction ψ sur une maille ω_i , notée $\bar{\psi}_{\omega_i}$, est définie comme la valeur moyenne en variable de masse. De manière équivalente, elle s'écrit comme la moyenne spatiale pondérée par la densité :

$$\bar{\psi}_{\omega_i}(t) = \frac{1}{m_i} \int_{\Theta_i} \widehat{\psi}(\mu, t) d\mu = \frac{1}{m_i} \int_{\omega(t)} \psi(x, t) \rho(x, t) dx = \frac{1}{m_i} \int_{\Omega} \tilde{\psi}(X, t) \rho_0(X) dX.$$

Après avoir introduit la domaine spatial et massique, définissons à présent une partition du domaine temporel $[0, T]$, où T est l'instant final. Pour cela, soient les temps intermédiaires $0 = t_0 < t_1 < \dots < T_{N_t} = T$ tels que $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ soit le n^e pas de temps. Pour définir notre schéma VF, intégrons tout d'abord le système (5) sur $\Theta_i \times [t_n, t_{n+1}]$:

$$\bar{V}_{\omega_i}(t_{n+1}) = \bar{V}_{\omega_i}(t_n) - \frac{\Delta t_n}{m_i} \left(\bar{G}_{[t_n, t_{n+1}]}(x_{i+\frac{1}{2}}) - \bar{G}_{[t_n, t_{n+1}]}(x_{i-\frac{1}{2}}) \right), \quad (6)$$

où les termes flux $\bar{G}_{[t_n, t_{n+1}]}(x_{i\pm\frac{1}{2}})$ sont définis comme :

$$\bar{G}_{[t_n, t_{n+1}]}(x_{i\pm\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G(V(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)) dt = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G(\widehat{V}(\mu_{i\pm\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (7)$$

Pour construire notre schéma VF, introduisons à présent la solution approchée $V_h(x, t)$, constante par morceaux, telle que pour $x \in]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$:

$$V_h(x, t) = V_i^n,$$

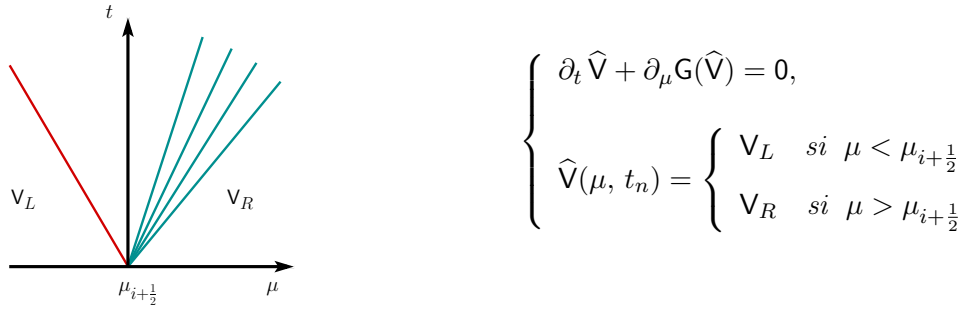
où V_i^n sera une approximation de $\bar{V}_{\omega_i}(t_n)$. Pour mimer la forme intégrale (6) du système (5), on introduit le schéma VF suivant :

$$V_i^{n+1} = V_i^n - \frac{\Delta t_n}{m_i} \left(G_{i+\frac{1}{2}}^* - G_{i-\frac{1}{2}}^* \right), \quad (8)$$

où $G_{i+\frac{1}{2}}^* = (-u_{i+\frac{1}{2}}^*, p_{i+\frac{1}{2}}^*, p_{i+\frac{1}{2}}^* u_{i+\frac{1}{2}}^*)^t = G^*(V_i^n, V_{i+1}^n)$ est le vecteur flux numérique à l'interface $x_{i+\frac{1}{2}}$, approchant (7), et $G^*(., .)$ la fonction flux numérique caractérisant le schéma VF. De manière similaire, le maillage sera transporté comme suit :

$$x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = x_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta t_n u_{i+\frac{1}{2}}^*.$$

Remarque 3.2. Le schéma VF repose sur la définition de la fonction flux numérique $G^*(., .)$. Cette dernière se base sur la résolution exacte ou approchée du problème de Riemann :



Dans ce contexte, $V_L = V_i^n$ et $V_R = V_{i+1}^n$.

Rappels sur les problèmes de Riemann dans le cadre des lois de conservation scalaires

En considérant une loi de conservation scalaire (cours de M1 MANU - HAX703X), définie comme :

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x f(v) = 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases}$$

où $v(x, t) \in \mathbb{R}$, et en réécrivant l'EDP dans sa forme non-conservative : $\partial_t v + \underbrace{f'(v)}_{a(v)} \partial_x v = 0$, on rappelle qu'en définissant les courbes caractéristiques comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t x(X, t) = a(v(x(X, t), t)), \\ x(X, 0) = X, \end{cases}$$

on obtient alors que :

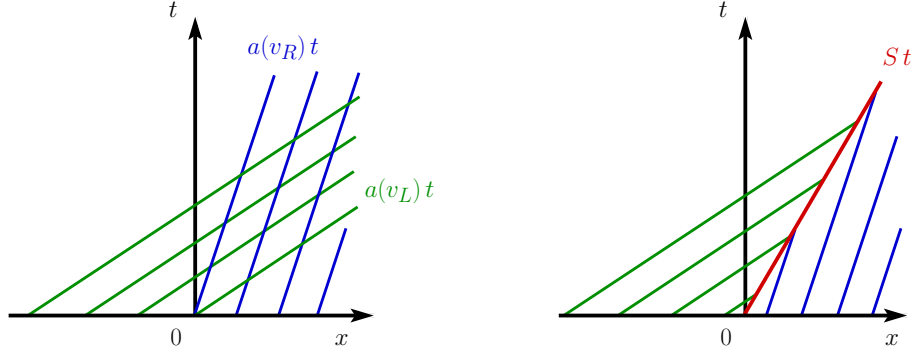
$$\frac{dv(x(X, t), t)}{dt} = 0 \implies v(x(X, t), t) = v(X, 0).$$

De plus, la solution étant constante le long des courbes caractéristiques, ces dernières se réduisent finalement à des droites : $x(X, t) = a(v_0(X)) t + X$. Il en suit que dans le cas d'une donnée initiale à deux états constants (problème de Riemann) définie comme :

$$v_0(x) = \begin{cases} v_L & \text{si } x < 0, \\ v_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

on obtient, dans le cas d'un flux f convexe ou concave, deux situations distinctes :

- 1) $a(v_L) > a(v_R)$: les caractéristiques se croisent, il y a donc création d'un **choc**.



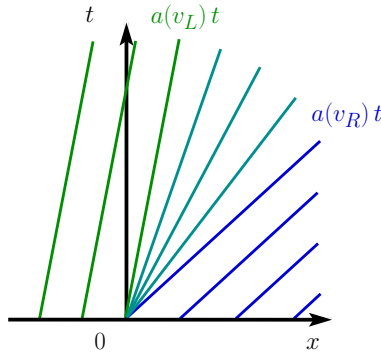
La vitesse du choc est régit par la relation de **Rankine-Hugoniot** :

$$S(v_R - v_L) = f(v_R) - f(v_L).$$

Il y a donc trois cas possible, suivant le signe de S : un choc à gauche ($S < 0$), un choc centré ($S = 0$), et un choc à droite ($S > 0$). La solution du problème de Riemann s'écrit alors :

$$v(x, t) = \begin{cases} v_L & \text{si } x < St, \\ v_R & \text{si } x > St. \end{cases}$$

- 2) $a(v_L) < a(v_R)$: les caractéristiques se séparent, il y a donc création d'une **détente**.



Il y a alors trois cas possible, suivant le signe de $a(v_L)$ et $a(v_R)$: une détente à gauche ($a(v_R) \leq 0$), une détente centrée ($a(v_L) \leq 0 \leq a(v_R)$), et une détente à droite ($a(v_L) \geq 0$).

La solution du problème de Riemann s'écrit alors :

$$v(x, t) = \begin{cases} v_L & \text{si } x \leq a(v_L) t, \\ a^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } a(v_L) t \leq x \leq a(v_R) t, \\ v_R & \text{si } x \geq a(v_R) t. \end{cases}$$

À présent, étudions de le cas d'un système strictement hyperbolique :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0,$$

système qui se réécrit sous forme non-conservative comme : $\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = 0$, avec la matrice jacobienne $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{F}(\mathbf{U})$. Le système considéré étant hyperbolique, la matrice $\mathbf{A}$ admet p valeurs propres réelles $\{\lambda_j(\mathbf{U})\}_j$. Par diagonalisation, nous obtenons : $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U}) \mathbf{\Lambda}(\mathbf{U}) \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{U})$, où $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{U})$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de $\mathbf{A}$. La forme non-conservative du système se réécrit donc : $\mathbf{P}^{-1} \partial_t \mathbf{U} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{U}) \mathbf{P}^{-1} \partial_x \mathbf{U} = 0$. Au final, en définissant $d\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} d\mathbf{U}$, la diagonalisation du système donne :

$$\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{\Lambda} \partial_x \mathbf{V} = 0,$$

où $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_p)^t$ est le vecteurs contenant les variables caractéristiques, aussi appelées invariants de Riemann. En détail, le système se reformule en p lois de conservation sur les v_j :

$$\partial_t v_j + \lambda_j(\mathbf{V}) \partial_x v_j = 0.$$

Par la même méthode des caractéristiques que dans le cas scalaire, et donc en introduisant p courbes caractéristiques $x_j(X, t)$ définies par :

$$\begin{cases} \partial_t x_j(X, t) = \lambda_j\left(\mathbf{V}(x_j(X, t), t)\right), \\ x_j(X, 0) = X, \end{cases} \quad (9)$$

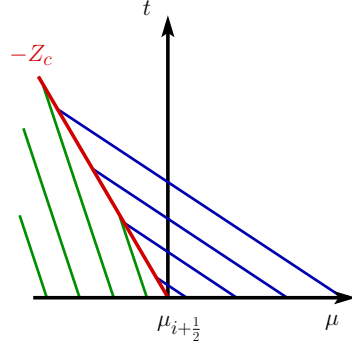
on obtient alors que les invariants de Riemann sont eux aussi constants le long de ces courbes :

$$v_j(x_j(X, t), t) = v_{j,0}(X),$$

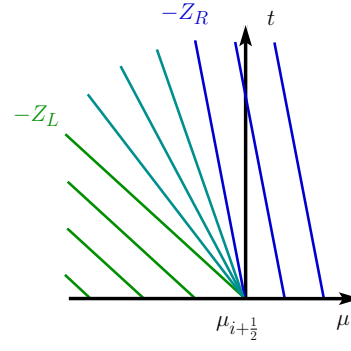
avec $v_{j,0}$ le j^e invariant de Riemann à l'instant initial. Cependant, à la différence du cas scalaire où les courbes caractéristiques se trouvaient être des droites, dans le cas présent seul v_j est constant le long de la j^e courbe, et non les autres. La pente de la courbe (9) n'est donc pas constante. Dans le cas général, les caractéristiques sont effectivement courbes. L'étude d'un problème de Riemann sera alors d'autant plus complexe que chaque problème verra potentiellement l'apparition de p ondes superposées. Et même en faisant l'approximation d'ondes droites, et non courbes, les quantités reliant ces p ondes sont couplées par des relation non-linéaires.

Retour au système lagrangien de la dynamique des gaz

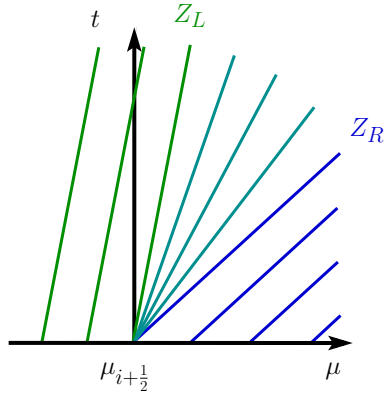
De retour sur le système qui nous intéresse, (5), en introduisant $Z = \rho a$, généralement nommé impédance acoustique, on a montré précédemment que les trois valeurs propres du système étaient $-Z$, 0 et Z . Après diagonalisation, et en notant $Z_{L/R} = Z(\mathbf{V}_{L/R})$, la méthode des caractéristiques nous donnera trois problèmes superposés, liés par la définition des caractéristiques. Pour appréhender ce problème complexe, étudions indépendamment les problèmes de Riemann des variables caractéristiques en omettant les deux autres :



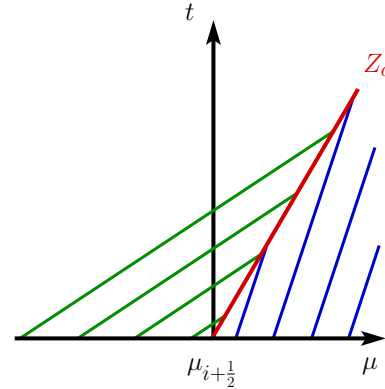
(a) $Z_L < Z_c < Z_R$: choc



(b) $Z_L > Z_R$: détente



(a) $Z_L < Z_R$: détente



(b) $Z_L > Z_c > Z_R$: choc

- 1) Prenons $\lambda = -Z < 0$ et omettons les autres :
- 2) Même chose pour $\lambda = Z > 0$
- 3) Finalement, pour $\lambda = 0$

La relation de Rankine-Hugoniot, dans le contexte du système (5), nous donne :

$$S [\mathbf{V}] = [\mathbf{G}(\mathbf{V})]$$

[R-H]

où $[\varphi] = \varphi_R - \varphi_L$, et S est la vitesse de la discontinuité considérée. Dans le cas présent, $S = 0$, ce qui implique $[\mathbf{G}(\mathbf{V})] = 0$. La discontinuité portée par la valeur propre 0 est appelée Discontinuité De Contact (DDC). Et, car $[p] = [u] = 0$, la vitesse et la pression sont continues à travers une telle discontinuité. Une DDC correspond simplement au transport d'une discontinuité de densité. De plus, l'entropie est conservée à travers une telle discontinuité (transformation réversible), ce qui n'est pas le cas d'un choc.

Même en faisant l'approximation que les courbes des ondes sont droites, en combinant la contribution des trois ondes, on arrive à un problème très complexe à résoudre :

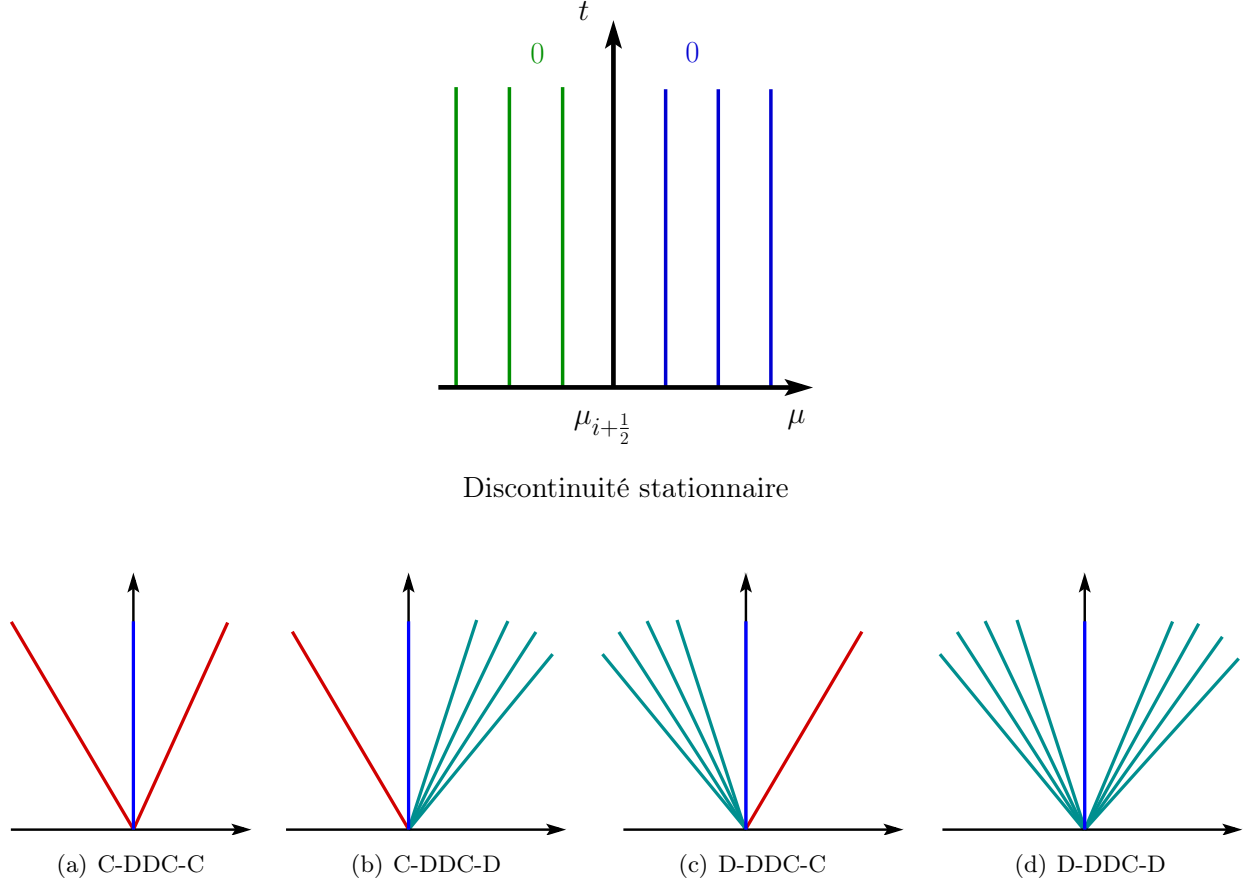


Figure 5: Les quatre situations possibles, avec — : Choc, — : DDC, — : Détente

Étudions plus précisément le cas détente - discontinuité de contact - choc :

Dans Figure 6, les quantités $\mathbf{V}_{L/R}^* = (\tau_{L/R}^*, u_{L/R}^*, e_{L/R}^*)^t$ représentent les états intermédiaires de Riemann.

Remarque 3.3. Les définitions de $\mathbf{V}_{L/R}^*$ et les vitesses d'ondes Z_D^- et Z_C^+ sont couplées par des relations non-linéaires. Il devient alors très compliqué de résoudre ce problème analytiquement (approximations, méthode de point fixe, ...). C'est la raison pour laquelle on utilise généralement des solveurs de Riemann approchés.

3.1.1 Lax-Friedrichs local (Rusanov)

On ignore ici la structure des différentes ondes en moyennant dans un “éventail” assez large :

Dans ce contexte, $\mathbf{G}_{L/R} = \mathbf{G}(\mathbf{V}_{L/R})$. En appliquant $[R-H]$ pour les deux discontinuités, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{G}^* - \mathbf{G}_L &= -\bar{Z} (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_L), \\ \mathbf{G}^* - \mathbf{G}_R &= \bar{Z} (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_R). \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne alors :

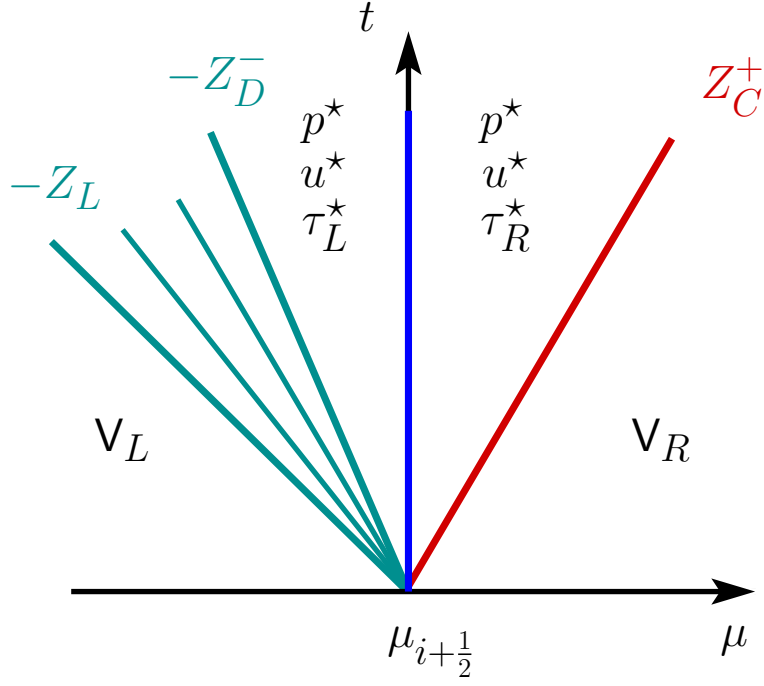
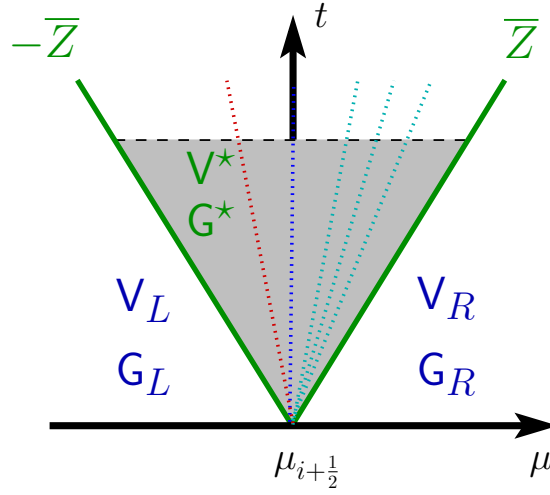


Figure 6: Diagramme du problème de Riemann : D-DDC-C



$$G^* = \frac{G_L + G_R}{2} - \frac{\bar{Z}}{2} (V_R - V_L)$$

En détail, ce flux se réécrit :

$$\left| \begin{array}{lcl}
u^* & = & \frac{u_L + u_R}{2} - \frac{\bar{Z}}{2} (\tau_R - \tau_L), \\
p^* & = & \frac{p_L + p_R}{2} - \frac{\bar{Z}}{2} (u_R - u_L), \\
(pu)^* & = & \frac{p_L u_L + p_R u_R}{2} - \frac{\bar{Z}}{2} (e_R - e_L), \\
& \neq & p^* u^*.
\end{array} \right.$$

Remarque 3.4. Dans ce solveur, on note que $G^* \neq G(V^*)$. Il est possible de démontrer que V^* est la valeur moyenne, entre les droites $\mu = \mu_{i+\frac{1}{2}} \pm \bar{Z}(t - t_n)$, de la solution faible entropique. De la même manière, G^* est la valeur moyenne du flux appliqué à la solution entropique, et non le flux appliquée à la valeur moyenne de la solution entropique.

En résumé, le solveur de Rusanov est le plus simple, dans lequel cependant toute la structure des ondes a été ignorée. La fonction flux numérique caractérisant le schéma volumes finis (8) s'écrit alors :

$$G^*(V_L, V_R) = \frac{G(V_L) + G(V_R)}{2} - \frac{Z(V_L, V_R)}{2} (V_R - V_L),$$

avec, par exemple, $Z(V_L, V_R) = \max(Z_L, Z_R)$.

3.1.2 Linéarisation par rapport à un état

On va définir ici le flux numérique comme le flux de la solution d'un problème linéarisé autour d'un état moyen $\bar{V}$:

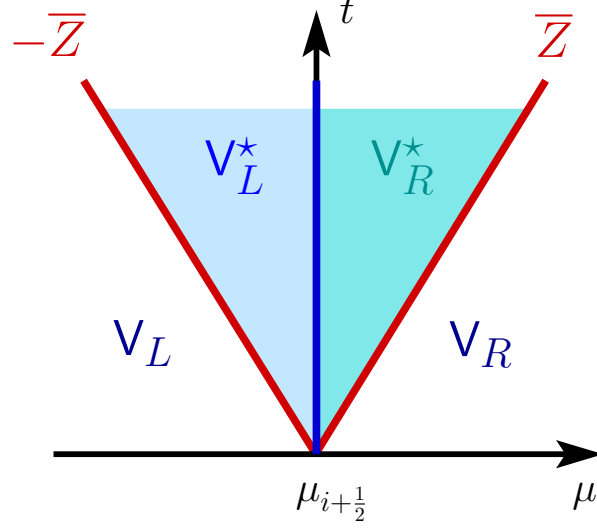
$$\partial_t V + A(\bar{V}) \partial_\mu V = 0. \quad (10)$$

Ce problème de Riemann linéarisé se représente donc comme :

En appliquant $[R-H]$, on obtient les condition suivantes :

- 1) Pour la valeur propre nulle, on a : $G_R^* - G_L^* = 0 \times (V_R^* - V_L^*)$. Cela implique que $G_R^* = G_L^* := G^*$. On a donc en détail que : $p_L^* = p_R^* := p^*$ et $u_L^* = u_R^* := u^*$. Pour la dernière composante du flux, on pose que $(pu)^* := p^* u^*$.
- 2) Pour la valeur propre $-\bar{Z}$: $G^* - G_L = -\bar{Z} (V_L^* - V_L)$. La deuxième composante de cette équation vectorielle nous donne : $p^* - p_L = -\bar{Z} (u^* - u_L)$.
- 3) Pour la valeur propre $\bar{Z}$: $G^* - G_R = \bar{Z} (V_R^* - V_R)$. La deuxième composante de cette équation vectorielle nous donne : $p^* - p_R = \bar{Z} (u^* - u_R)$.

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues nous donne la définition suivante du flux numérique :



$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{u_L + u_R}{2} - \frac{1}{2\bar{Z}} (p_R - p_L), \\
 p^* &= \frac{p_L + p_R}{2} - \frac{\bar{Z}}{2} (u_R - u_L), \\
 (pu)^* &= p^* u^*.
 \end{aligned}$$

Le flux numérique du schéma VF s'écrit donc comme $\mathbf{G}^*(V_L, V_R) = (-u^*, p^*, p^* u^*)^t$ avec, par exemple, $\bar{Z} = \max(Z_L, Z_R)$.

3.1.3 Linéarisation par rapport à deux états

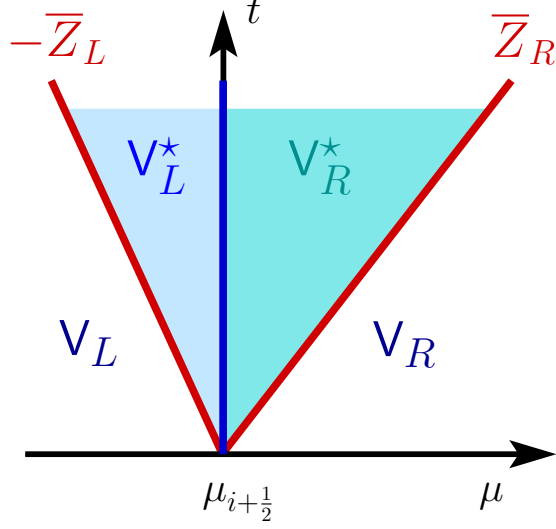
On va définir ici le flux numérique comme le flux de la solution d'un problème linéarisé autour de deux états $\bar{V}_L$ et $\bar{V}_R$:

$$\partial_t \mathbf{V} = - \begin{cases} \mathbf{A}(\bar{V}_L) \partial_\mu \mathbf{V} & \text{si } \mu < \mu_{i+\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{A}(\bar{V}_R) \partial_\mu \mathbf{V} & \text{si } \mu > \mu_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (11)$$

Ce problème de Riemann linéarisé se représente donc comme :

Comme précédemment, l'application des relations de $[R-H]$ nous donne :

- 1) Pour la valeur propre nulle, on a : $\mathbf{G}_R^* - \mathbf{G}_L^* = 0 \times (\mathbf{V}_R^* - \mathbf{V}_L^*)$. Cela implique que $\mathbf{G}_R^* = \mathbf{G}_L^* := \mathbf{G}^*$. On a donc en détail que : $p_L^* = p_R^* := p^*$ et $u_L^* = u_R^* := u^*$. Pour la dernière composante du flux, on pose que $(pu)^* := p^* u^*$.



- 2) Pour la valeur propre $-\bar{Z}_L$: $\mathbf{G}^* - \mathbf{G}_L = -\bar{Z}_L (\mathbf{V}_L^* - \mathbf{V}_L)$. La deuxième composante de cette équation vectorielle nous donne : $p^* - p_L = -\bar{Z}_L (u^* - u_L)$.
- 3) Pour la valeur propre $\bar{Z}_R$: $\mathbf{G}^* - \mathbf{G}_R = \bar{Z}_R (\mathbf{V}_R^* - \mathbf{V}_R)$. La deuxième composante de cette équation vectorielle nous donne : $p^* - p_R = \bar{Z}_R (u^* - u_R)$.

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues nous donne la définition suivante du flux numérique :

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{\bar{Z}_L u_L + \bar{Z}_R u_R}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_R} - \frac{1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_R} (p_R - p_L), \\
 p^* &= \frac{\bar{Z}_R p_L + \bar{Z}_L p_R}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_R} - \frac{\bar{Z}_L \bar{Z}_R}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_R} (u_R - u_L), \\
 (pu)^* &= p^* u^*.
 \end{aligned}$$

Le flux numérique du schéma VF s'écrit donc comme $\mathbf{G}^*(\mathbf{V}_L, \mathbf{V}_R) = (-u^*, p^*, p^* u^*)^t$ avec, par exemple, $\bar{Z}_L = Z_L = \rho_L a_L$ et $\bar{Z}_R = Z_R = \rho_R a_R$.

Démo :

En résumé : Le schéma VF lagrangien 1D s'écrit :

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t_n}{m_i} \left(\mathbf{G}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{G}_{i-\frac{1}{2}}^* \right),$$

avec l'un des flux numériques précédents, et $x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = x_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta t_n u_{i+\frac{1}{2}}^*$, sous la condition CFL de stabilité : $\forall i \in \llbracket 1, N_m \rrbracket$:

$$\Delta t_n \leq \frac{1}{2} \frac{m_i}{\max_j (\rho_j a_j)} \quad (12)$$

Démo : Schéma de type Godunov

3.2 Schémas eulériens

Rappelons tout d'abord le système de la dynamique des gaz compressibles en formalisme eulérien, à savoir le système d'Euler :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_x ((\rho e + p) u) = 0. \end{cases}$$

Ce système se réécrit sous forme vectorielle comme :

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{H}(\mathbf{W}) = 0, \quad (13)$$

dans lequel $\mathbf{W} = (\rho, q, E)^t$ où $q = \rho u$ désigne la quantité de mouvement et $E = \rho e$ l'énergie totale, et où le flux $\mathbf{H}(\mathbf{W}) = \left(q, \frac{q^2}{\rho} + p, (E + p) \frac{q}{\rho} \right)^t$.

Remarque 3.5. *En forme non-conservative, ce système s'écrit :*

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathbf{B}(\mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = 0,$$

où la matrice jacobienne $\mathbf{B}(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{H}(\mathbf{W})$ admet $\{u - a, u, u + a\}$ comme valeurs propres.

Comme précédemment, on introduit un maillage de notre domaine (qui sera, dans ce contexte eulérien, fixe) tel que $\omega = [x_d, x_f] = \bigcup_{i=1}^{N_m} \omega_i = \bigcup_{i=1}^{N_m} [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, avec $\Delta x_i = |\omega_i|$. Le vecteur $\mathbf{W}_i^n$ sera alors la valeur moyenne de la solution approchée $\mathbf{W}_h$ sur la maille ω_i à l'instant t_n telle que :

$$\mathbf{W}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\omega_i} \mathbf{W}_h(x, t_n) dx.$$

En intégrant le système (13) sur ω_i , on obtient alors le schéma VF suivant :

$$\mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x_i} \left(\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{H}_{i-\frac{1}{2}}^* \right), \quad (14)$$

où $\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^* = \mathbf{H}^*(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n)$ est le flux numérique à l'interface $x_{i+\frac{1}{2}}$, caractérisant le schéma VF. Comme précédemment, les flux numériques seront définis comme des solveurs de Riemann approchés, du problème (13) complété par la donnée à l'instant t_n suivante :

$$\mathbf{W}(x, t_n) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x < x_{i+\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > x_{i+\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

avec $\mathbf{W}_L = \mathbf{W}_i^n$ et $\mathbf{W}_R = \mathbf{W}_{i+1}^n$.

Remarque 3.6. *La résolution analytique du problème de Riemann devient encore plus complexe dans ce contexte eulérien du fait que les vitesses d'ondes peuvent aussi bien être positives que négative (voir par exemple les cas C-DDC-D suivants).*

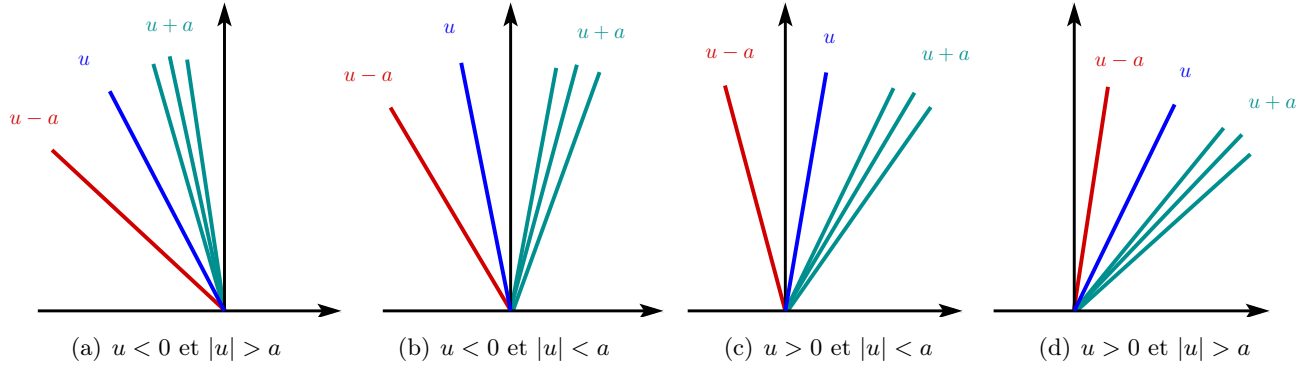
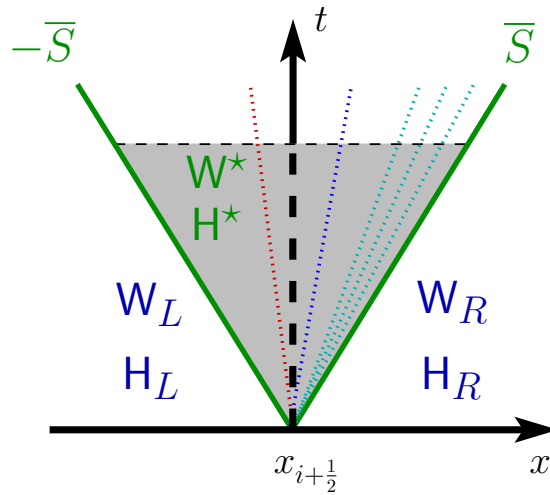


Figure 7: Différentes situations possibles dans le cas choc - discontinuité de contact - détente

3.2.1 Lax-Friedrichs local (Rusanov)

Comme en lagrangien, on ignore ici la structure des ondes en moyennant la solution :



Dans ce contexte, $H_{L/R} = H(W_{L/R})$. En appliquant $[R-H]$ pour les deux discontinuités, on obtient :

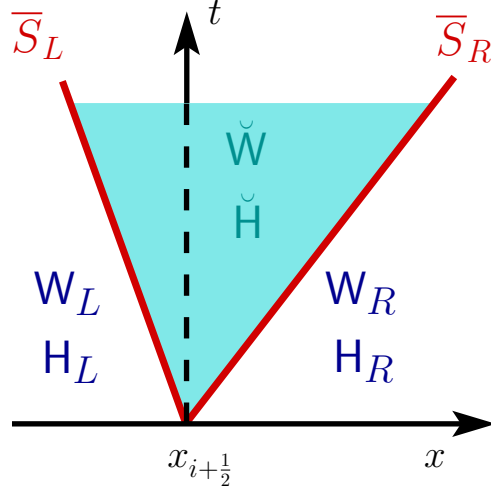
$$H^* = \frac{H_L + H_R}{2} - \frac{\bar{S}}{2} (W_R - W_L),$$

avec, par exemple, $\bar{S} = \max(a_L + |u_L|, a_R + |u_R|)$.

Démo :

3.2.2 Solveur HLL (Harten - Lax - van Leer)

De manière similaire à Rusanov, on ignore ici la structure des ondes (approximation choc - choc), mais en s'autorisant ici une définition plus fine de l'éventail contenant les ondes issues du problème de Riemann :



À nouveau, $H_{L/R} = H(W_{L/R})$. En appliquant $[R-H]$ pour les deux discontinuités, on obtient :

$$\check{H} = \frac{\bar{S}_R H_L - \bar{S}_L H_R + \bar{S}_R \bar{S}_L (W_R - W_L)}{\bar{S}_R - \bar{S}_L}. \quad (15)$$

En revanche, comme $\bar{S}_L$ peut être positif et $\bar{S}_R$ négatif, le flux numérique, défini comme le flux pris sur l'interface $x_{i+1/2}$, s'écrit donc :

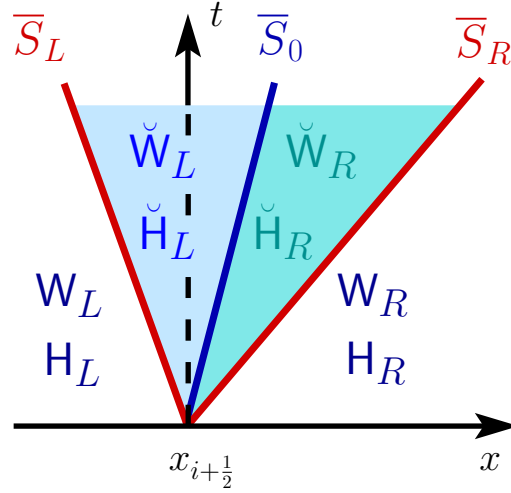
$$H^*(W_L, W_R) = \begin{cases} H_L & \text{si } \bar{S}_L \geq 0, \\ \check{H} & \text{si } \bar{S}_L \leq 0 \leq \bar{S}_R, \\ H_R & \text{si } \bar{S}_R \leq 0, \end{cases}$$

avec, par exemple, $\bar{S}_L = \min(u_L - a_L, u_R - a_R)$ et $\bar{S}_R = \max(a_L + u_L, a_R + u_R)$.

Démo :

3.2.3 Solveur HLL-C (HLL-Contact)

À la structure précédente, on rajoute une discontinuité de contact portée par $\lambda = u$ (approximation choc - DDC - choc) :



En utilisant $[R-H]$, on obtient cette fois-ci trois relations :

- 1) $\bar{S}_L (\check{W}_L - W_L) = \check{H}_L - H_L$
- 2) $\bar{S}_0 (\check{W}_R - \check{W}_L) = \check{H}_R - \check{H}_L$
- 3) $\bar{S}_R (W_R - \check{W}_R) = H_R - \check{H}_R$

Le flux numérique s'écrit donc :

$$H^*(W_L, W_R) = \begin{cases} H_L & \text{si } \bar{S}_L \geq 0, \\ H_L + \bar{S}_L (\check{W}_L - W_L) & \text{si } \bar{S}_L \leq 0 \leq \bar{S}_0, \\ H_R + \bar{S}_R (\check{W}_R - W_R) & \text{si } \bar{S}_0 \leq 0 \leq \bar{S}_R, \\ H_R & \text{si } \bar{S}_R \leq 0. \end{cases}$$

Il reste donc à définir $\check{W}_{L/R}$, ainsi que les vitesses d'ondes. Afin de préserver la DDC, nous imposons :

$$\begin{cases} \check{p}_L = \check{p}_R := \check{p}, \\ \check{u}_L = \check{u}_R := \check{u}. \end{cases}$$

De plus, on pose $\bar{S}_0 = \check{u}$.

Pour $k = L/R$, les relations de Rankine-Hugoniot se réécrivent donc :

$$\begin{aligned}\check{\rho}_k &= \rho_k \left(\frac{\bar{S}_k - u_k}{\bar{S}_k - \bar{S}_0} \right), \\ \check{p} &= p_k + \rho_k (\bar{S}_0 - u_k) (\bar{S}_k - u_k), \\ \check{E}_k &= \check{\rho}_k \left(\frac{E_k}{\rho_k} + (\bar{S}_0 - u_k) \left(\bar{S}_0 + \frac{p_k}{\rho_k (\bar{S}_k - u_k)} \right) \right).\end{aligned}$$

Au final, pour $k = L/R$:

$$\check{W}_k = \rho_k \left(\frac{\bar{S}_k - u_k}{\bar{S}_k - \bar{S}_0} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{S}_0 \\ \frac{E_k}{\rho_k} + (\bar{S}_0 - u_k) \left(\bar{S}_0 + \frac{p_k}{\rho_k (\bar{S}_k - u_k)} \right) \end{pmatrix}.$$

Il reste à définir $\bar{S}_0$, ainsi que $\bar{S}_L$ et $\bar{S}_R$. Pour les deux dernières, on pourra par exemple prendre $\bar{S}_L = \min(u_L - a_L, u_R - a_R)$ et $\bar{S}_R = \max(a_L + u_L, a_R + u_R)$. Pour $\bar{S}_0$, on utilise la définition de $\check{p}$:

$$\bar{S}_0 = \frac{\rho_R u_R (\bar{S}_R - u_R) - \rho_L u_L (\bar{S}_L - u_L) - p_R + p_L}{\rho_R (\bar{S}_R - u_R) - \rho_L (\bar{S}_L - u_L)}$$

Démo :

Démo :