Master MANu
Modélisation numérique (HAX007X)

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Formulaire

A) Formules vectorielles et tensorielles

Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, A, B et T des matrices dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, et $\mathsf{F} \in \mathsf{GL}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On introduit alors les définitions et relations suivantes :

A.1) Produit tensoriel

- $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ tel que : $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{i\,j} = a_i\, b_j$
- $(\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})^{\mathrm{t}}$
- $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\ \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\ \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{c})\ \boldsymbol{b}$
- $\mathsf{T}\,(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = (\mathsf{T}\,\boldsymbol{a}) \otimes \boldsymbol{b}$ et $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\,\mathsf{T} = \boldsymbol{a} \otimes (\mathsf{T}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{b})$

A.2) Produit intérieur - *inner product*

- $(\mathsf{A} : \mathsf{B}) \in \mathbb{R}$ tel que : $\mathsf{A} : \mathsf{B} = \operatorname{tr}(\mathsf{A}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{B}) = \sum_{i,j} A_{ij}\, B_{ij}$
- $\mathsf{A} : \mathsf{B} = \mathsf{B} : \mathsf{A}$
- $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) : (\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\ (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})$

A.3) Produit vectoriel

- $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_2\, v_3 - u_3\, v_2 \\ u_3\, v_1 - u_1\, v_3 \\ u_1\, v_2 - u_2\, v_1 \end{pmatrix} = -\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$
- Soit $\mathsf{F}^\star = \det(\mathsf{F})\,\mathsf{F}^{-\mathrm{t}}$ la matrice cofactrice, aussi appelée comatrice, de F, alors :

$$\mathsf{F}\,\boldsymbol{u} \times \mathsf{F}\,\boldsymbol{v} = \mathsf{F}^\star\ (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$$

B) Formules Intégrales

Soient f, $\boldsymbol{\varphi}$ et T respectivement des fonctions scalaires, vectorielles et tensorielles régulières. Soit un domaine Ω, $\partial\Omega$ sa frontière et $\boldsymbol{N}$ sa normale unitaire sortante. On a alors les relations suivantes :

- $\displaystyle\int_\Omega \nabla f \; \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} f\, \boldsymbol{N} \; \mathrm{d}S$
- $\displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{\varphi} \; \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi} \otimes \boldsymbol{N} \; \mathrm{d}S$
- $\displaystyle\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \; \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{N} \; \mathrm{d}S$
- $\displaystyle\int_\Omega \nabla \cdot \mathsf{T} \; \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \mathsf{T}\, \boldsymbol{N} \; \mathrm{d}S$

C) Identités différentielles

Soient f, $\boldsymbol{\varphi}$ et T respectivement des fonctions scalaires, vectorielles et tensorielles régulières :

- $\nabla \cdot (f\, \boldsymbol{\varphi}) = f\, (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla f$
- $\nabla \cdot (f\, \mathsf{T}) = f\, (\nabla \cdot \mathsf{T}) + \mathsf{T}\, \nabla f$
- $\nabla\, (f\, \boldsymbol{\varphi}) = f\, \nabla \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi} \otimes \nabla f$
- $\nabla \cdot (\mathsf{T}\, \boldsymbol{\varphi}) = \Big(\nabla \cdot \big(\mathsf{T}^{\mathrm{t}}\big)\Big) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \mathsf{T}^{\mathrm{t}} : \nabla \boldsymbol{\varphi}$

Soient $\boldsymbol{\varphi}_1$ et $\boldsymbol{\varphi}_2$ deux fonctions vectorielles régulières :

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}_1 \otimes \boldsymbol{\varphi}_2) = (\nabla \boldsymbol{\varphi}_1)\, \boldsymbol{\varphi}_2 + \boldsymbol{\varphi}_1\, (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_2)$$

Soient $f : \mathcal{M}_d \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathsf{T} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_d$ deux fonctions régulières. On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f\big(\mathsf{T}(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial \mathsf{T}} : \frac{\mathrm{d}\,\mathsf{T}}{\mathrm{d}t},$$

où $\displaystyle\left(\frac{\partial f}{\partial \mathsf{T}}\right)_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \mathsf{T}_{ij}}$.