

Résolution des lois de conservation scalaires

École Mathématique Africaine

François Vilar

Institut Montpellierain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier

Août 2019



IMAG
INSTITUT MONTPELLIERAIN
ALEXANDER GROTHENDIECK



- 1 Introduction aux EDP
- 2 Résolution analytique des LCS
- 3 Schémas volumes finis appliquées au LCS
- 4 Extension aux ordres élevés
- 5 Phénomène de Gibbs et oscillations parasites
- 6 Correction *a posteriori* de sous-mailles

- 1 Introduction aux EDP
- 2 Résolution analytique des LCS
- 3 Schémas volumes finis appliqués au LCS
- 4 Extension aux ordres élevés
- 5 Phénomène de Gibbs et oscillations parasites
- 6 Correction *a posteriori* de sous-maillages**

Solution numérique admissible

- Préservation du principe du maximum / de positivité
- Prévenir les crash du code (par exemple empêcher les *NaN*)
- **Assurer la conservation du schéma**

Oscillations parasites

- Principe du maximum discret
- Condition de relaxation pour les extrema réguliers

Précision

- Préserver le plus possible la résolution de sous-maille des schémas GD
- Minimiser le nombre de mailles où recalculer la solution

Modifier localement, à l'échelle des sous-maillages, la solution numérique sans impacter la solution ailleurs dans la maille

GD vu comme un schéma VF de sous-maillles

- Réécrire les schémas GD comme un schéma volumes finis particulier
- Expliciter les flux numériques de sous-maillles : **flux reconstruits**

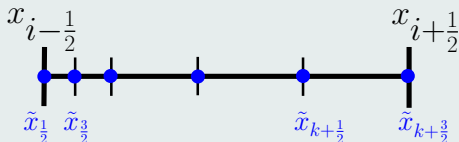
Formulation variationnelle locale

$$\bullet \int_{\omega_i} \frac{\partial u_h^i}{\partial t} \psi \, dx = \int_{\omega_i} F(u_h^i) \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx - [\mathcal{F} \psi]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \forall \psi \in \mathbb{P}^k(\omega_i)$$

- On remplace $F(u_h^i)$ par $F_h^i \in \mathbb{P}^{k+1}(\omega_i)$ (collocation ou projection L_2)

$$\bullet \int_{\omega_i} \frac{\partial u_h^i}{\partial t} \psi \, dx = - \int_{\omega_i} \frac{\partial F_h^i}{\partial x} \psi \, dx + [(F_h^i - \mathcal{F}) \psi]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \forall \psi \in \mathbb{P}^k(\omega_i)$$

Décomposition en sous-cellules grâce à $k + 2$ points de flux



Sous-division et définition

- ω_j est sous-divisé en $k + 1$ sous-cellules $S_m^i = [\tilde{x}_{m-\frac{1}{2}}, \tilde{x}_{m+\frac{1}{2}}]$
- On définit $\bar{\psi}_m = \frac{1}{|S_m^i|} \int_{S_m^i} \psi \, dx$ les valeurs moyennes de sous-maillles

Fonctions de base de sous-résolution

- On introduit les $k + 1$ fonctions de base $\{\phi_m\}_m$ telles que $\forall \psi \in \mathbb{P}^k(\omega_j)$

$$\int_{\omega_j} \phi_m \psi \, dx = \int_{S_m^i} \psi \, dx, \quad \forall m = 1, \dots, k + 1,$$

- $\sum_{m=1}^{k+1} \phi_m(x) = 1$

Ces fonctions bien particulières peuvent être vues comme la projection L_2 des fonctions indicatrices $\mathbb{1}_m(x)$ sur $\mathbb{P}^k(\omega_j)$

Schéma volumes finis de sous-maillages

$$\bullet \int_{\omega_i} \frac{\partial u_h^i}{\partial t} \phi_m \, dx = - \int_{\omega_i} \frac{\partial F_h^i}{\partial x} \phi_m \, dx + \left[(F_h^i - \mathcal{F}) \phi_m \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$\bullet |S_m^i| \frac{\partial \bar{u}_m^i}{\partial t} = - \int_{S_m^i} \frac{\partial F_h^i}{\partial x} \, dx + \left[(F_h^i - \mathcal{F}) \phi_m \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$\bullet \frac{\partial \bar{u}_m^i}{\partial t} = - \frac{1}{|S_m^i|} \left(\left[F_h^i \right]_{\tilde{x}_{m-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{m+\frac{1}{2}}} - \left[\phi_m (F_h^i - \mathcal{F}) \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\bullet \frac{\partial \bar{u}_m^i}{\partial t} = - \frac{1}{|S_m^i|} \left(\hat{F}_{m+\frac{1}{2}}^i - \hat{F}_{m-\frac{1}{2}}^i \right)$$

volumes finis de sous-maillages

Système linéaire

$$\bullet \hat{F}_{m+\frac{1}{2}}^i - \hat{F}_{m-\frac{1}{2}}^i = \left[F_h^i \right]_{\tilde{x}_{m-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{m+\frac{1}{2}}} - \left[\phi_m (F_h^i - \mathcal{F}) \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \forall m \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$$

$$\bullet \hat{F}_{\frac{1}{2}}^i = \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \hat{F}_{k+\frac{3}{2}}^i = \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$$

Flux reconstruits

- $\widehat{F}_{m+\frac{1}{2}}^i = F_h^i(\widetilde{x}_{m+\frac{1}{2}}) - C_{m+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \left(F_h^i(x_{i-\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} \right) - C_{m+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \left(F_h^i(x_{i+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} \right)$
- $C_{m+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} = \sum_{p=m+1}^{k+1} \phi_p(x_{i-\frac{1}{2}})$ et $C_{m+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = \sum_{p=1}^m \phi_p(x_{i+\frac{1}{2}})$

Correction pour une distribution symétrique des points $\{\widetilde{x}_{m+\frac{1}{2}}\}_m$

- Soit $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k+1}$ défini comme $B_j = (-1)^{j+1} \binom{k+j}{j} \binom{k+1}{j}$
- $\widetilde{\xi}_{m+\frac{1}{2}} = \frac{\widetilde{x}_{m+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}, \quad \forall m = 0, \dots, k+1$
- $C_{m+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\widetilde{\xi}_{m+\frac{1}{2}}, \dots, (\widetilde{\xi}_{m+\frac{1}{2}})^{k+1} \right)^t \cdot \mathbf{B}$ et $C_{m+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = C_{k+\frac{3}{2}-m}^{i-\frac{1}{2}}$

Volumes fins de sous-maillages équivalent à Galerkin discontinu

- $$\int_{\omega_i} \frac{\partial u_h^i}{\partial t} \psi \, dx = \int_{\omega_i} F(u_h^i) \frac{\partial \psi}{\partial X} \, dx - \left[\mathcal{F} \psi \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \forall \psi \in \mathbb{P}^k(\omega_i)$$
- $$\frac{\partial \bar{u}_m^i}{\partial t} = -\frac{1}{|S_m^i|} \left(\widehat{F}_{m+\frac{1}{2}}^i - \widehat{F}_{m-\frac{1}{2}}^i \right), \quad \forall m = 1, \dots, k+1$$
- $$\widehat{F}_{m+\frac{1}{2}}^i = F_h^i(\tilde{x}_{m+\frac{1}{2}}) - C_{m+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \left(F_h^i(x_{i-\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} \right) - C_{m+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \left(F_h^i(x_{i+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} \right)$$

Flux reconstruits prenant en compte les sauts de flux

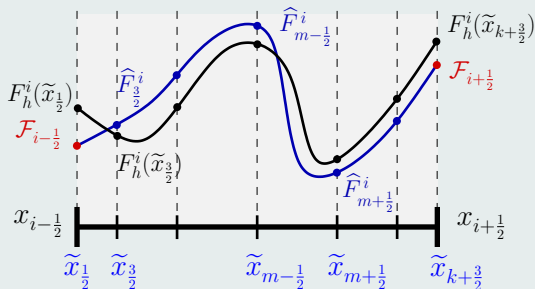


Schéma RK-DG

- Runge-Kutta *Strong-Stability preserving* (SSP): combinaisons convexes de schémas d'ordre 1 Euler explicites
- On peut donc se concentrer sur Euler explicite sans perte de généralité

Projection sur les sous-maillles de la solution numérique

- $u_h^{i,n}(x) = \sum_{m=1}^{k+1} u_m^{i,n} \sigma_m(x)$ est définie de manière unique par ses $k + 1$ valeurs moyennes de sous-maillles
- On introduisant la matrice de projection $\mathbf{\Pi}$ définie comme

$$\pi_{mp} = \frac{1}{|S_m^i|} \int_{S_m^i} \sigma_p \, dx,$$

on a alors

$$\mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} u_1^{i,n} \\ \vdots \\ u_{k+1}^{i,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^{i,n} \\ \vdots \\ \bar{u}_{k+1}^{i,n} \end{pmatrix}$$

Projection

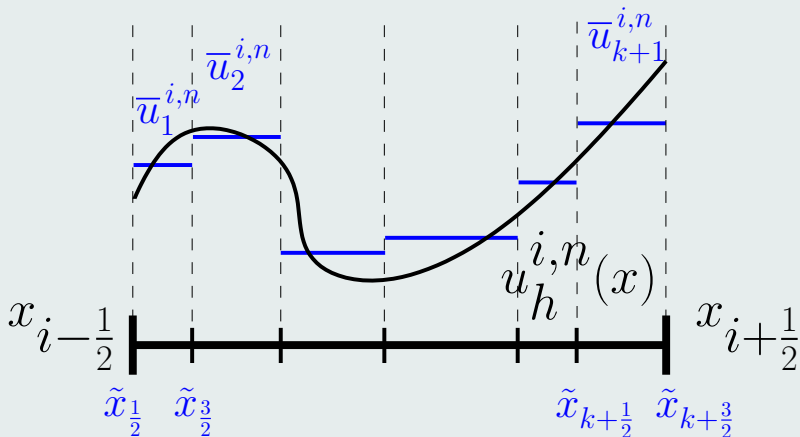


Figure : Solution polynomiale et les sous-valeurs moyennes associées

Mise en oeuvre

- On considère que, pour chaque cellule, les $\{\bar{u}_m^{i,n}\}_m$ sont admissibles
- On calcule une solution candidate u_h^{n+1} à partir de u_h^n par le schéma GD
- Pour chaque sous-maille, vérifier si les $\{\bar{u}_m^{i,n+1}\}_m$ sont admissibles

Détection d'Admissibilité Physique (DAP)

- Vérifier si $\bar{u}_m^{i,n+1}$ appartient à un ensemble d'admissibilité physique convexe (principe du maximum pour les LCS, positivité de la pression et de la densité pour Euler, ...)
- Vérifier l'apparition de *NaN* lors du calcul

Détection d'Admissibilité numérique (DAN)

- Principe du maximum discret sur les sous-valeurs moyennes :

$$\min_p(\bar{u}_p^{i-1,n}, \bar{u}_p^{i,n}, \bar{u}_p^{i+1,n}) \leq \bar{u}_m^{i,n+1} \leq \max_p(\bar{u}_p^{i-1,n}, \bar{u}_p^{i,n}, \bar{u}_p^{i+1,n})$$

- Ce critère doit être relaxer pour préserver les extrema régulier

Correction du flux reconstruit

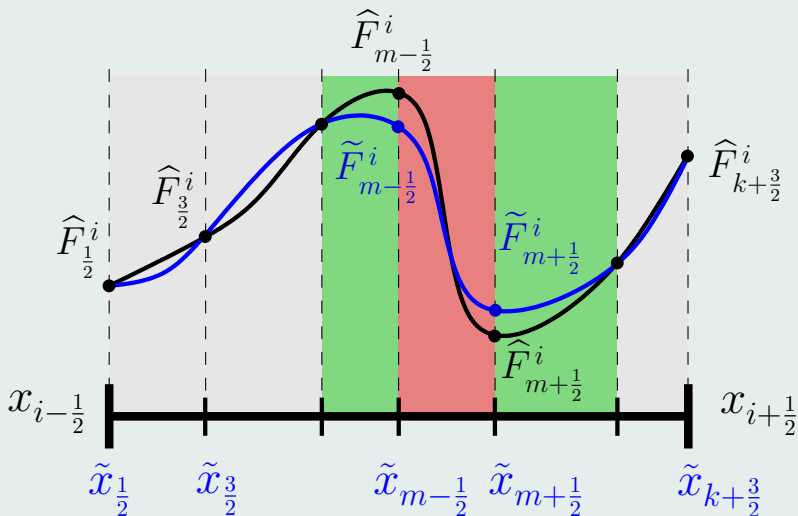


Figure : Correction du flux reconstruit

Procédure

- 1 Calculer la solution GD non-corrigée $u_h^{i,n+1}$
- 2 Projeter $u_h^{i,n+1}$ pour avoir les sous-valeurs moyennes $\bar{u}_m^{i,n+1}$
- 3 Vérifier $\bar{u}_m^{i,n+1}$ par les critères de détection plus relaxation
- 4 Si $\bar{u}_m^{i,n+1}$ est admissible, on avance en temps, sinon on modifie les flux reconstruits correspondants

$$\tilde{F}_{m-1}^i = \mathcal{F}(\bar{u}_{m-1}^{i,n}, \bar{u}_m^{i,n}) \quad \text{et} \quad \tilde{F}_m^i = \mathcal{F}(\bar{u}_m^{i,n}, \bar{u}_{m+1}^{i,n})$$

- 5 Par le flux reconstruit corrigé, recalculer les sous-valeurs moyennes des sous-maillles détectées et leurs premières voisines
- 6 Revenir à 3

Conclusion

- La limitation affecte seulement la solution GD à l'échelle de la sous-maille
- Le schéma corrigé est conservatif au niveau de la sous-maillles
- En pratique, très peu de sous-valeurs moyennes doivent être recalculées

Solution initiale sur $x \in [0, 1]$

- $u_0(x) = \sin(2\pi x)$
- Conditions aux bords périodiques

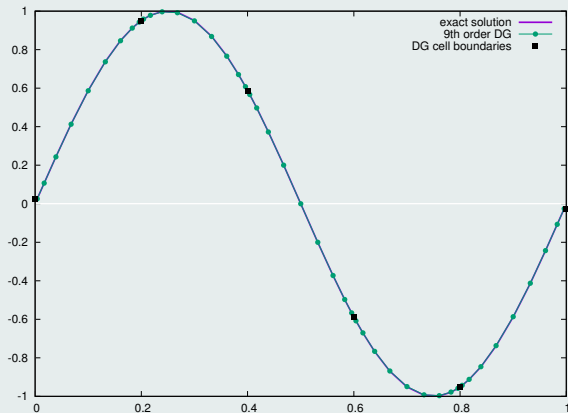


Figure : Advection linéaire avec un schéma GD d'ordre 9 et 5 mailles à $t = 1$

Taux de convergence

	L_1		L_2	
h	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$
$\frac{1}{20}$	8.07E-11	9.00	8.97E-11	9.00
$\frac{1}{40}$	1.58E-13	9.00	1.75E-13	9.00
$\frac{1}{80}$	3.08E-16	-	3.42E-16	-

Table: Taux de convergence pour l'advection linéaire pour GD ordre 9

Advection linéaire d'un signal carré après une période

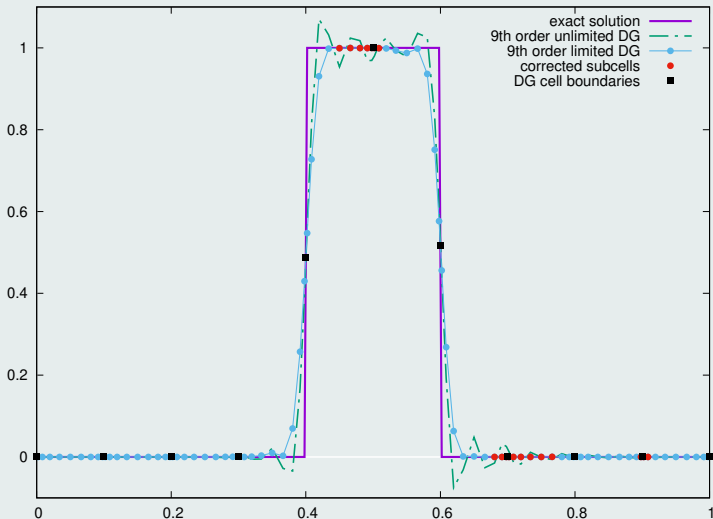
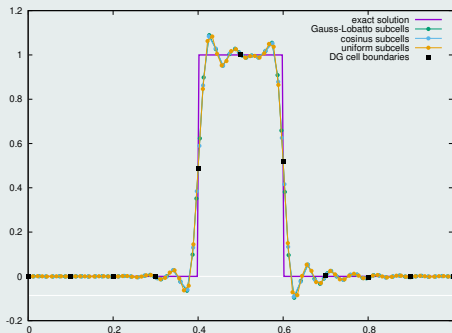
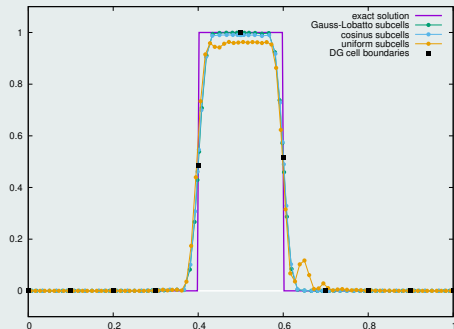


Figure : Schéma GD d'ordre 9 corrigé et non-corrigé

Advection linéaire d'un signal carré après 10 périodes



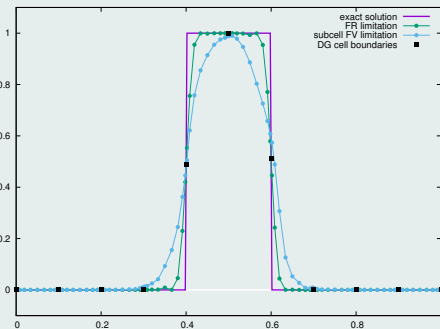
(a) Sans correction



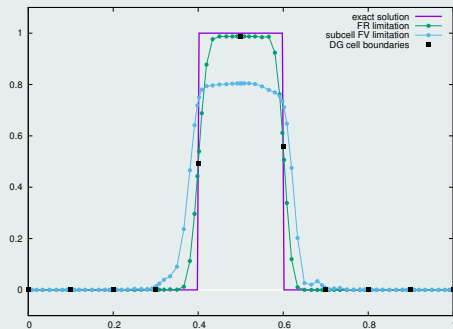
(b) Avec correction

Figure : Comparaison entre différentes sous-divisions

Advection linéaire d'un signal carré



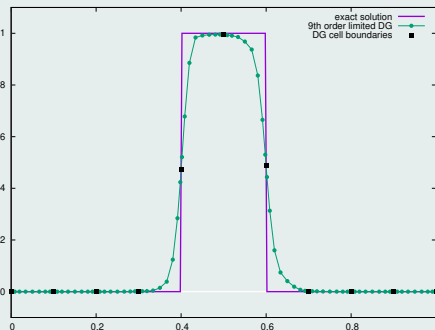
(a) Après 1 période



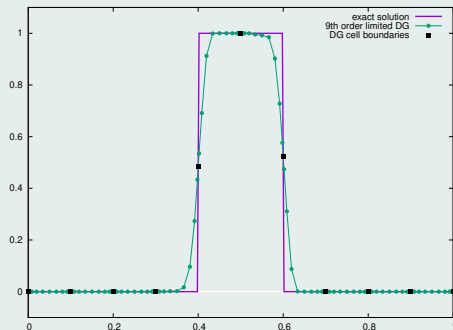
(b) Après 50 périodes

Figure : Comparaison entre limitations de sous-maillles

Advection linéaire d'un signal carré



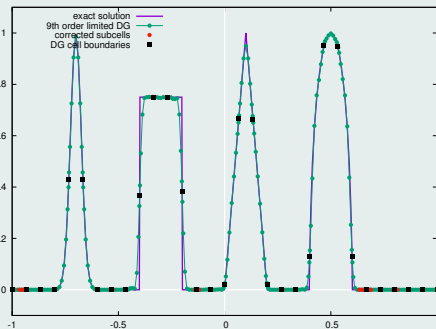
(a) Correction d'ordre 1



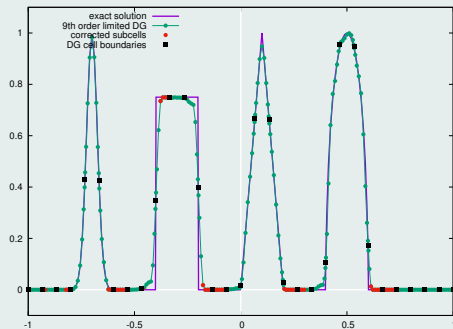
(b) Correction d'ordre 2

Figure : Comparaison entre les corrections d'ordre 1 et 2 pour le critère sousDAN

Advection linéaire d'un signal composite après 4 périodes



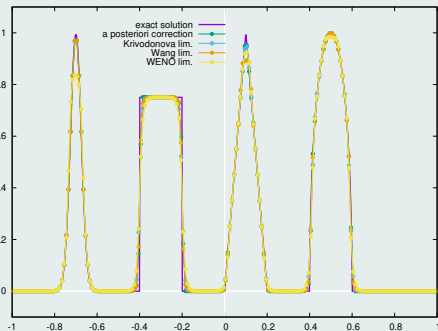
(a) DAN et correction d'ordre 1



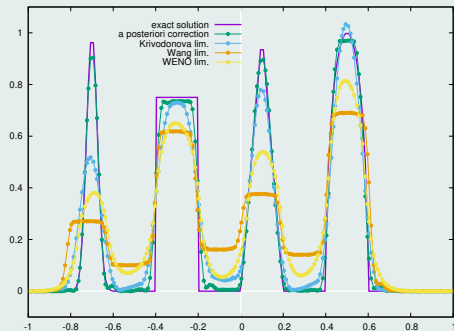
(b) sousDAN et correction d'ordre 2

Figure : GD corrigé d'ordre 9 sur 30 mailles

Advection linéaire d'un signal composite après 4 périodes



(a) 200 mailles: valeurs moyennes



(b) 50 mailles: sous-valeurs moyennes

Figure : GD d'ordre 4 avec différentes limitations

Advection linéaire d'un signal composite après 4 périodes

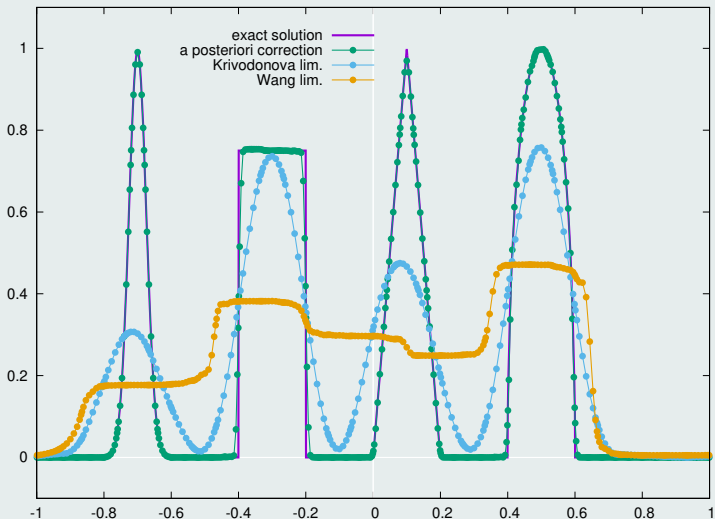


Figure : GD d'ordre 9 avec différentes limitations sur 30 mailles

Équation de Burgers: $u_0(x) = \sin(2\pi x)$

Figure : DG corrigé d'ordre 9 sur 10 mailles à $t_f = 0.7$

Équation de Burgers : collision entre choc et détente

Figure : DG d'ordre 9 corrigé sur 15 mailles à $t_f = 1.2$

Équation de Burgers : collision entre choc et détente

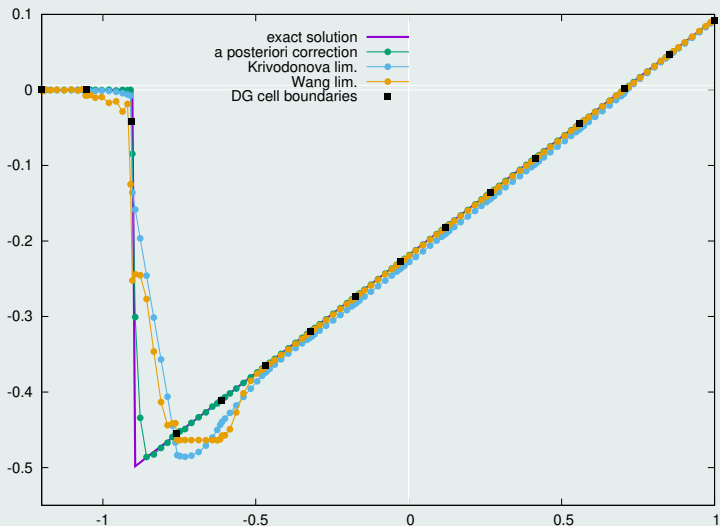


Figure : GD d'ordre 9 avec différentes limitations sur 15 mailles

Flux non-convexe de Buckley à $t = 0.4$

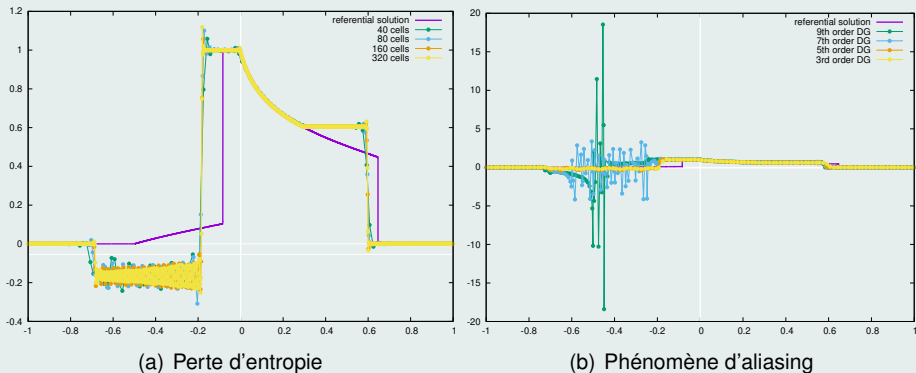
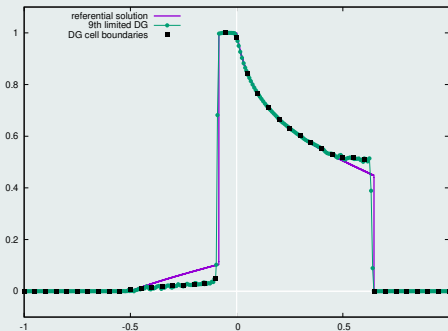
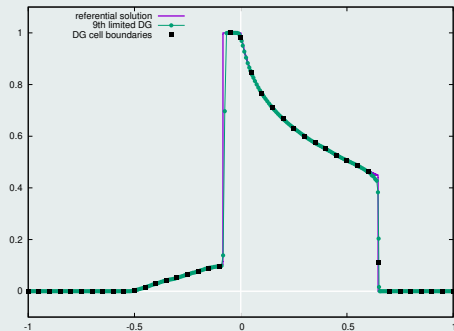


Figure : Solution GD non-corrigée pour Buckley

Flux non-convexe de Buckley à $t = 0.4$

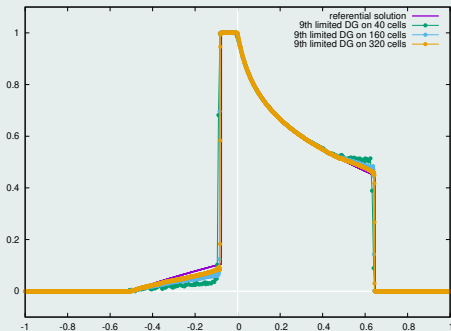


(a) Critère DAN

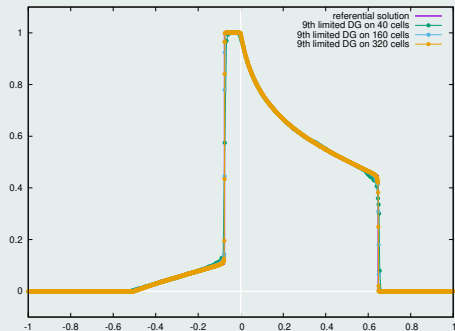


(b) Critère sousDAN

Figure : Solution GD d'ordre 9 sur 40 mailles

Flux non-convexe de Buckley à $t = 0.4$ 

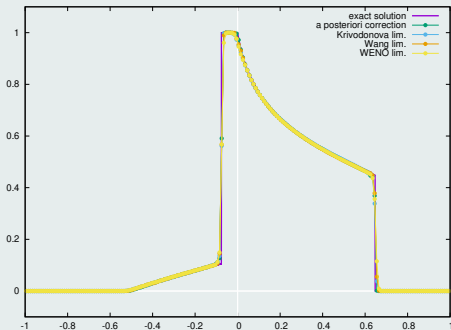
(a) Critère DAN



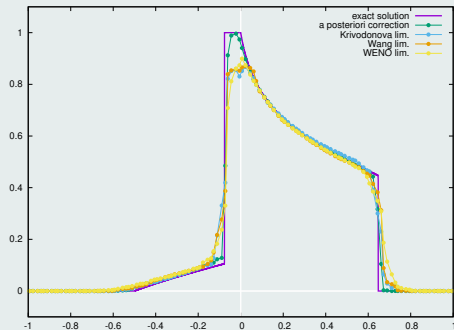
(b) Critère sousDAN

Figure : Analyse de convergence pour DG d'ordre 9

Flux non-convexe de Buckley à $t = 0.4$



(a) 200 cells: valeurs moyennes



(b) 30 mailles: sous-valeurs moyennes

Figure : DG d'ordre 4 avec différentes limitations

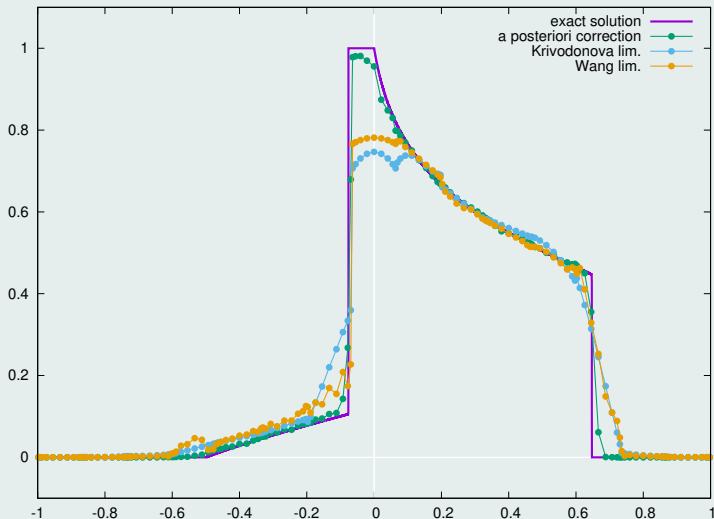
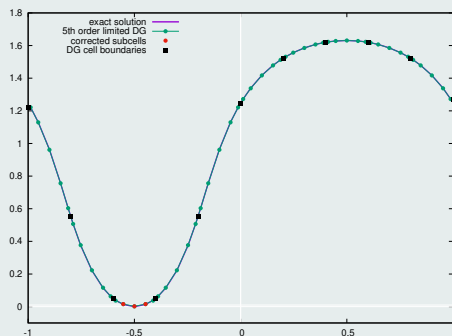
Flux non-convexe de Buckley à $t = 0.4$ 

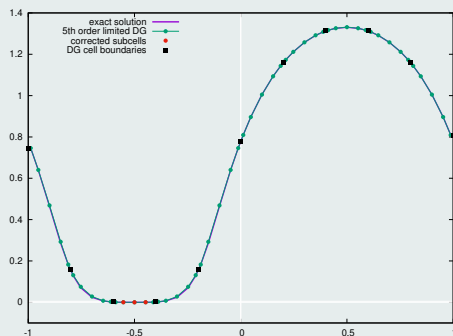
Figure : DG d'ordre 9 avec différentes limitations sur 15 mailles

Solution initiale sur $x \in [0, 1]$ pour $\gamma = 3$

- $\rho_0(x) = 1 + 0.9999999 \sin(\pi x)$, $u_0(x) = 0$, $p_0(x) = (\rho_0(x))^\gamma$
 $\implies \rho_0(-\frac{1}{2}) = 1.E - 7$ et $p_0(-\frac{1}{2}) = 1.E - 21$
- Conditions aux limites périodiques



(a) Densité



(b) Énergie interne

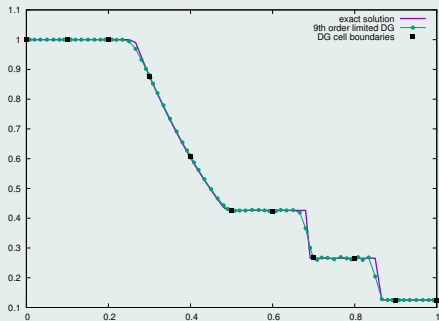
Figure : DG d'ordre 5 corrigé sur 10 mailles à $t = 0.1$

Taux de convergence

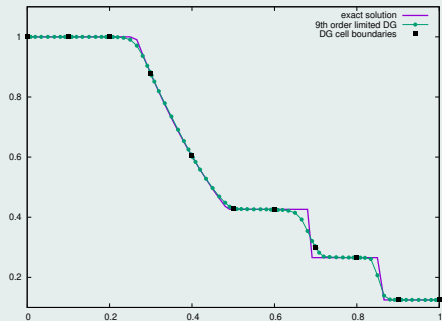
h	L_1		L_2		% moyens des sous-maillles corrigées
	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$	
$\frac{1}{20}$	1.48E-5	4.35	2.02E-5	4.18	6.87 %
$\frac{1}{40}$	9.09E-7	4.88	1.38E-6	4.87	3.31 %
$\frac{1}{80}$	3.09E-8	4.95	4.73E-8	4.86	2.50 %
$\frac{1}{160}$	1.00E-9	-	1.63E-9	-	1.12 %

Table: Taux de convergence sur la pression pour Euler avec DG d'ordre 5

Tube à choc de Sod



(a) DAN + 1st order correction



(b) sousDAN + 2nd order correction

Figure : 9th order corrected DG on 10 cells

Sod shock tube problem

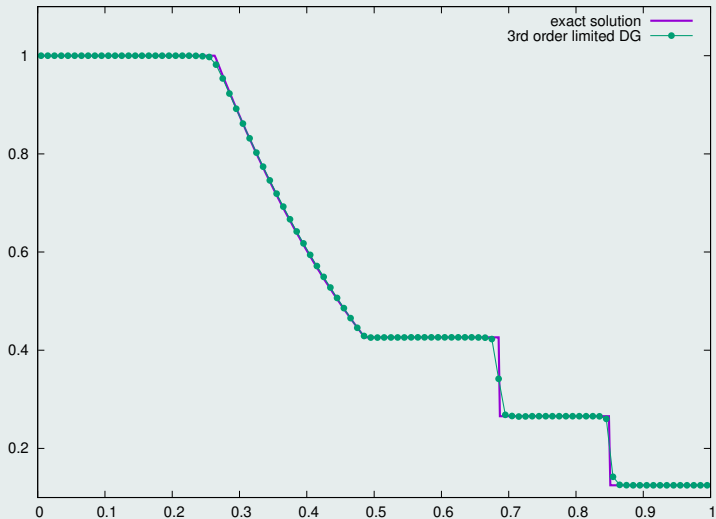
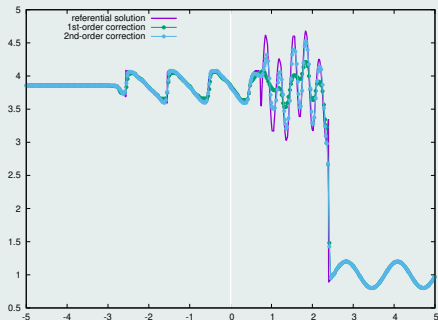
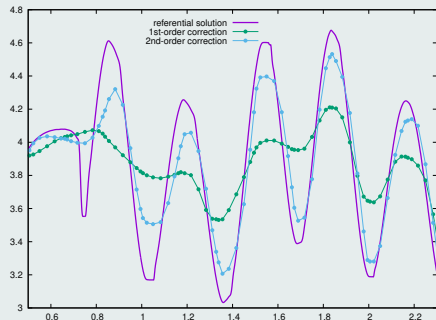


Figure : 3rd order DG solutions on 100 cells: cell mean values

Shock acoustic-wave interaction problem



(a) Global view



(b) Zoom on [0.5, 2.3]

Figure : 7th order corrected DG on 50 cells: comparison between 1st et 2nd order corrections

Shock acoustic-wave interaction problem

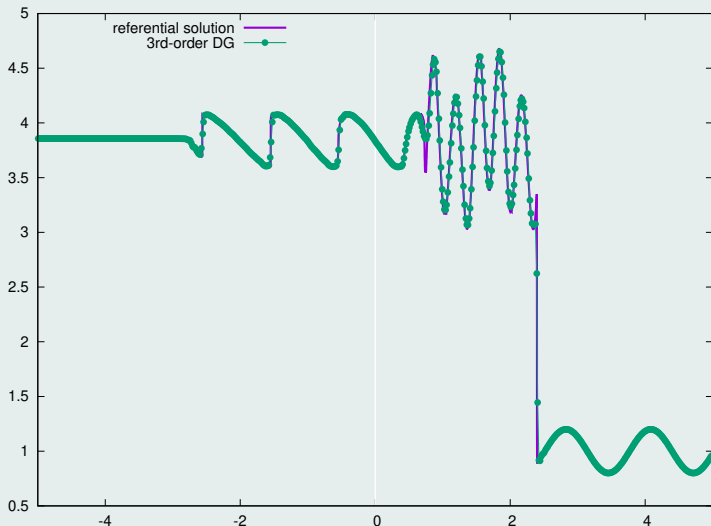


Figure : 3rd order corrected DG solutions on 200 cells: cell mean values

Blast waves interaction problem

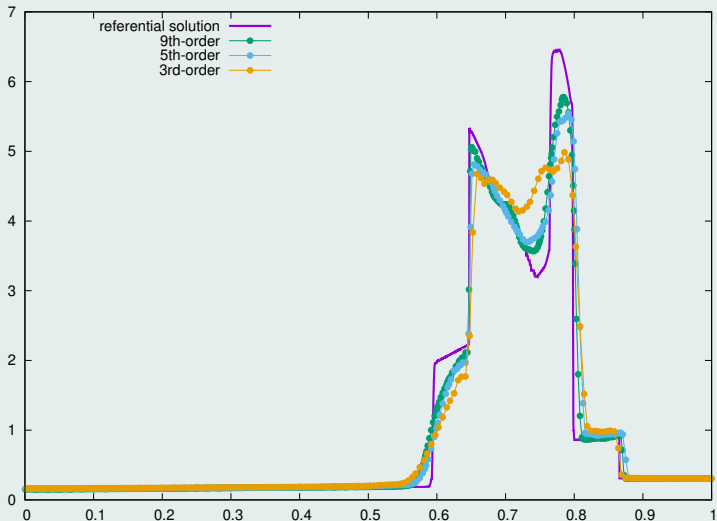
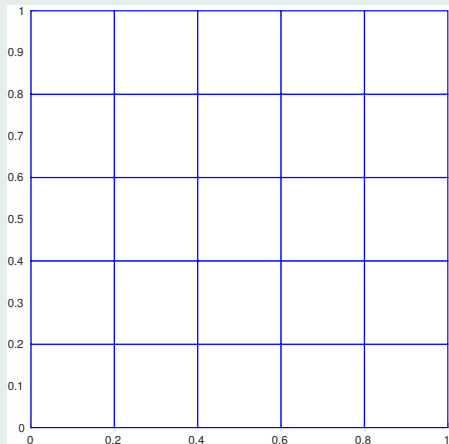
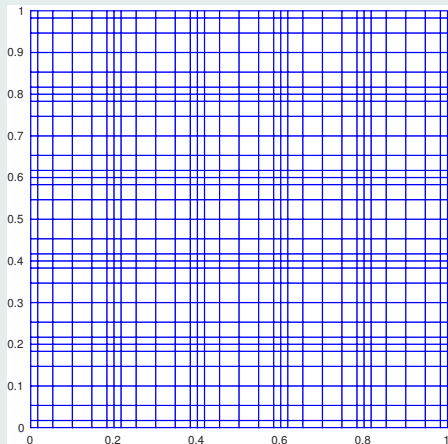


Figure : Corrected DG solution on 60 cells, from 3rd to 9th order

2D grid et subgrid



(a) Grid

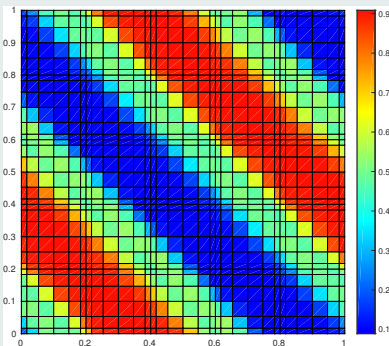


(b) Subgrid

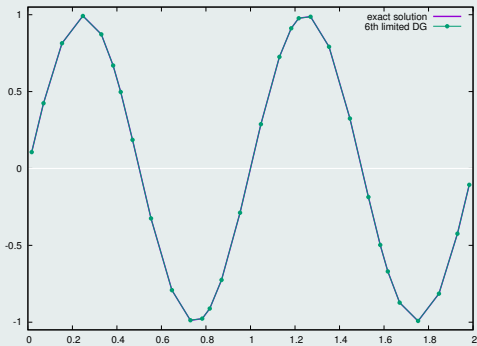
Figure : 5x5 Cartesian grid et correspondant subgrid for a 6th order DG scheme

Initial solution on $(x, y) \in [0, 1]^2$

- $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$
- Periodic boundary conditions



(a) Solution map



(b) Solution profile

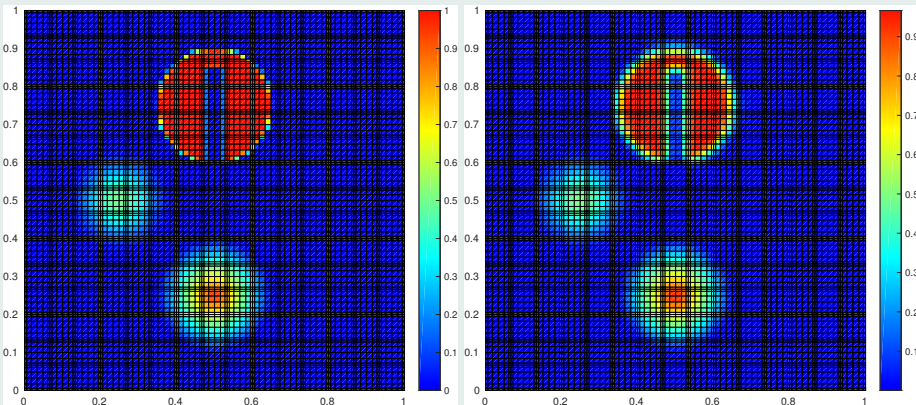
Figure : Linear advection with a 6th DG scheme et 5x5 grid after 1 period

Convergence rates

	L_1		L_2	
h	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$
$\frac{1}{5}$	2.10E-6	6.23	2.86E-6	6.24
$\frac{1}{10}$	2.79E-8	6.00	3.77E-8	6.00
$\frac{1}{20}$	3.36E-10	-	5.91E-10	-

Table: Convergence rates for the linear advection case for a 6th order DG scheme

Rotation of a composite signal after 1 period

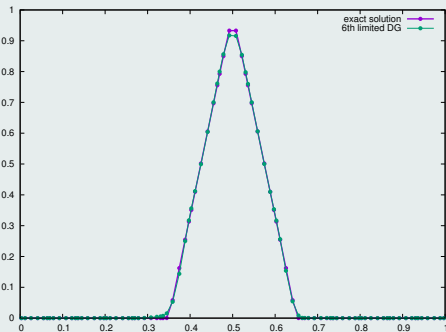


(a) Initial solution

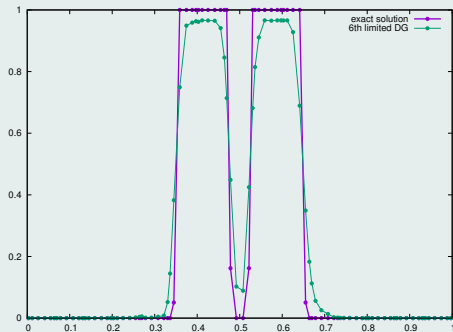
(b) Final solution

Figure : 6th order corrected DG on a 15x15 Cartesian mesh

Rotation of a composite signal after 1 period



(a) Solution profile for $y = 0.25$



(b) Solution profile for $y = 0.75$

Figure : 6th order corrected DG on a 15x15 Cartesian mesh

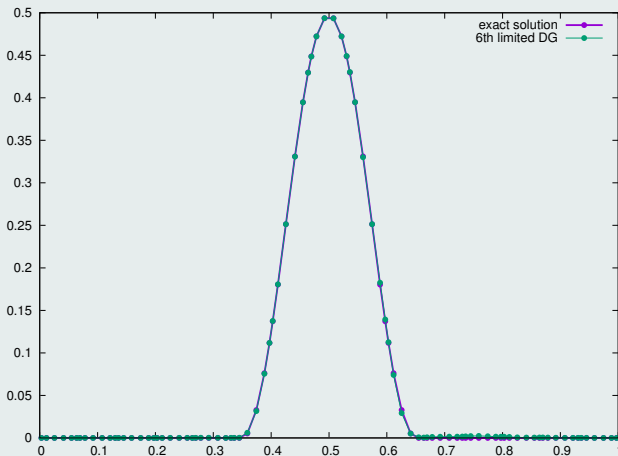
Rotation of a composite signal after 1 period: $x = 0.25$ 

Figure : 6th order corrected DG on a 15x15 Cartesian mesh

Burgers equation with $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$

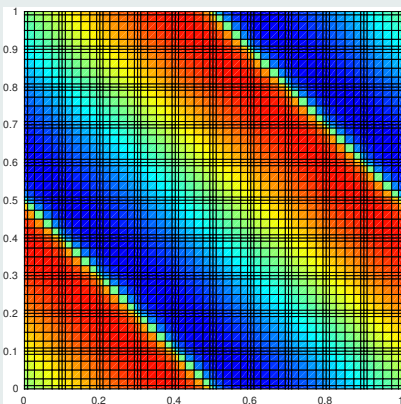
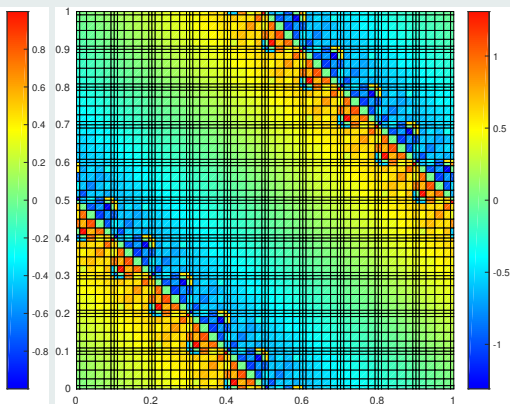
(a) Solution at $t = 0.007$ (b) Solution at $t = 0.25$

Figure : 6th order uncorrected DG on a 10x10 Cartesian mesh

Burgers equation with $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$

(a) Solution map

(b) Detected subcells

Figure : 6th order corrected DG on a 10x10 Cartesian mesh until $t = 0.5$

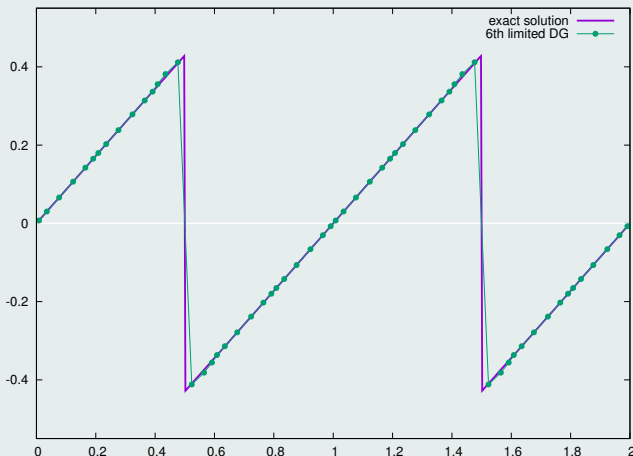
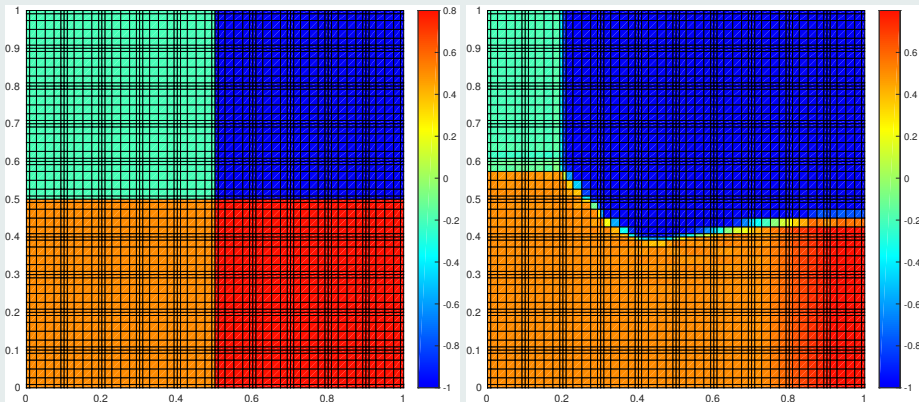
Burgers equation with $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$ at $t = 0.5$ 

Figure : 6th order corrected DG solution profile on a 10x10 Cartesian mesh

Burgers equation with composite signal



(a) Initial solution

(b) Solution at $t = 0.5$

Figure : 6th order corrected DG on a 10x10 Cartesian mesh

Kurganov, Petrova, Popov (KPP) non-convex flux problem

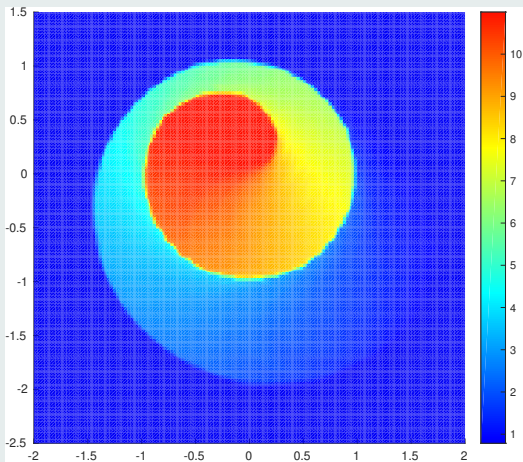


Figure : 6th order corrected DG solution on a 30x30 Cartesian mesh

Projets en cours

- Extension en non-structuré (avec R. Abgrall)
- *Maximum principle preserving DG scheme through subcell FCT reconstructed flux* (avec G. Gassner)
- *DoF based h-p adaptive DG scheme through subcell finite volume formulation* (avec R. Loubère et S. Clain)

Article publié



F. VILAR, *A Posteriori Correction of High-Order Discontinuous Galerkin Scheme through Subcell Finite Volume Formulation et Flux Reconstruction*. JCP, 2018.

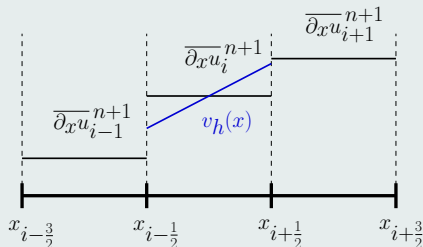
Relaxation of the DMP

- $v_L = \overline{\partial_x u_i}^{n+1} - \frac{\Delta x_i}{2} \overline{\partial_{xx} u_i}^{n+1}$
- $v_{\min \setminus \max} = \min \setminus \max (\overline{\partial_x u_i}^{n+1}, \overline{\partial_x u_{i-1}}^{n+1})$
- If $(v_L > \overline{\partial_x u_i}^{n+1})$ Then $\alpha_L = \min(1, \frac{v_{\max} - \overline{\partial_x u_i}^{n+1}}{v_R - \overline{\partial_x u_i}^{n+1}})$
- If $(v_L < \overline{\partial_x u_i}^{n+1})$ Then $\alpha_L = \min(1, \frac{v_{\min} - \overline{\partial_x u_i}^{n+1}}{v_R - \overline{\partial_x u_i}^{n+1}})$
- $v_R = \overline{\partial_x u_i}^{n+1} + \frac{\Delta x_i}{2} \overline{\partial_{xx} u_i}^{n+1}$
- $v_{\min \setminus \max} = \min \setminus \max (\overline{\partial_x u_i}^{n+1}, \overline{\partial_x u_{i+1}}^{n+1})$
- If $(v_R > \overline{\partial_x u_i}^{n+1})$ Then $\alpha_R = \min(1, \frac{v_{\max} - \overline{\partial_x u_i}^{n+1}}{v_R - \overline{\partial_x u_i}^{n+1}})$
- If $(v_R < \overline{\partial_x u_i}^{n+1})$ Then $\alpha_R = \min(1, \frac{v_{\min} - \overline{\partial_x u_i}^{n+1}}{v_R - \overline{\partial_x u_i}^{n+1}})$

Relaxation of the DMP

- $\alpha = \min(\alpha_L, \alpha_R)$
- If $(\alpha = 1)$ Then DMP is relaxed

Hierarchical limiter



- $v_h(x) = \overline{\partial_x u_i^{n+1}} + (x - x_i) \overline{\partial_{xx} u_i^{n+1}}$

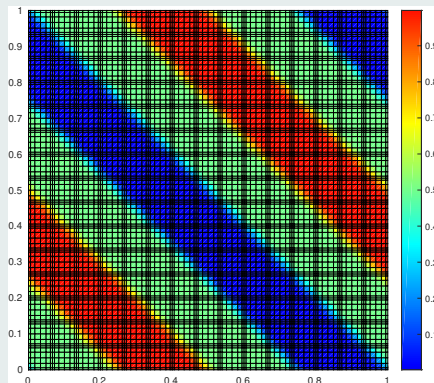


M. YANG et Z.J. WANG, *A parameter-free generalized moment limiter for high-order methods on unstructured grids*. AAMM., 2009.

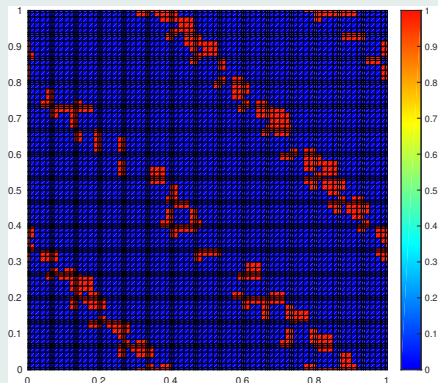


D. KUZMIN, *A vertex-based hierarchical slope limiter for p-adaptive discontinuous Galerkin methods*. J. of Comp. et Appl. Math., 2010.

Linear advection of a square signal after 1 period



(a) Solution map



(b) Solution profile

Figure : 6th order corrected DG on a 15x15 Cartesian mesh

Linear advection of a square signal after 1 period

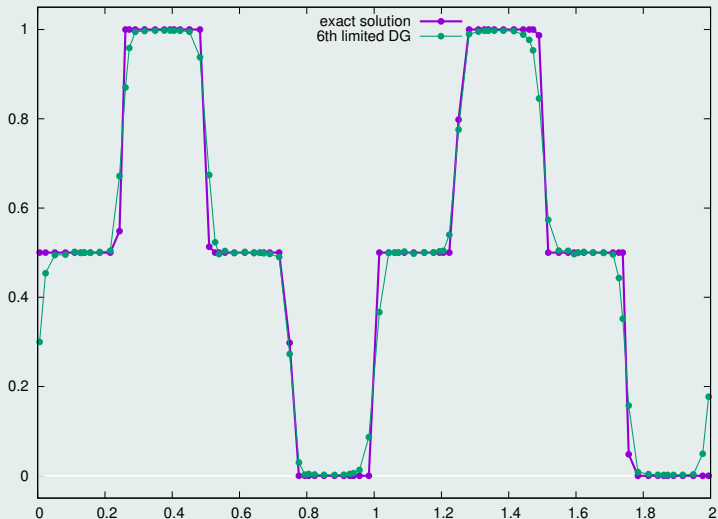


Figure : 6th order corrected DG on a 15x15 Cartesian mesh