

# Résolution des lois de conservation scalaires

## École Mathématique Africaine

**François Vilar**

Institut Montpellierain Alexander Grothendieck  
Université de Montpellier

Août 2019



**IMAG**  
INSTITUT MONTPELLIERAIN  
ALEXANDER GROTHENDIECK



- 1 Introduction aux EDP
- 2 Résolution analytique des LCS
- 3 Schémas volumes finis appliquées au LCS
- 4 Extension aux ordres élevés
- 5 Phénomène de Gibbs et oscillations parasites
- 6 Correction *a posteriori* de sous-mailles

- 1 Introduction aux EDP
- 2 Résolution analytique des LCS
- 3 Schémas volumes finis appliquées au LCS
- 4 Extension aux ordres élevés
- 5 Phénomène de Gibbs et oscillations parasites**
- 6 Correction *a posteriori* de sous-mailles

# Perte de monotonie

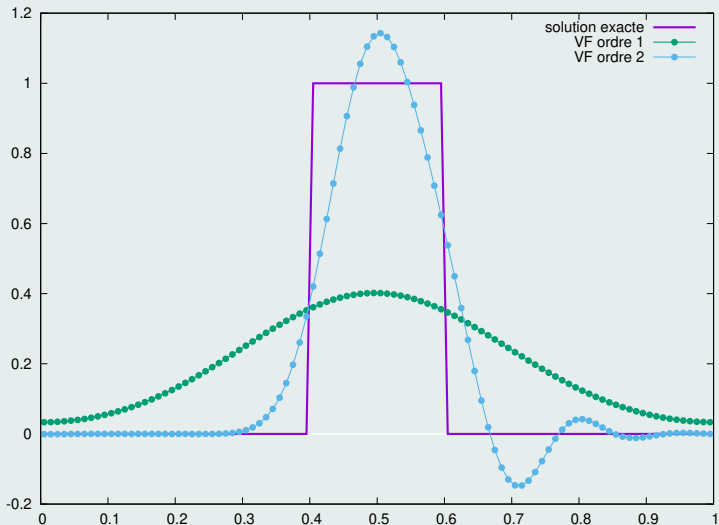


Figure : Advection linéaire d'un signal composite après 1 période

## Schéma VF d'ordre 2

- On considère le schéma VF d'ordre 2 pour lequel

$$u_h^{j,n}(x) = u_i^n + (x - x_i) \delta u_i^n$$

- Les pentes  $\delta u_i^n$  sont calculées à partir des  $u_i^n$
- On rappelle que les valeurs interpolées aux interfaces

$$u_{i-\frac{1}{2}}^+ = u_i^n - \frac{1}{2} \Delta x_i \delta u_i^n \quad \text{et} \quad u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i^n + \frac{1}{2} \Delta x_i \delta u_i^n$$

## Monotonie

- Supposons que les trois valeurs successives  $u_{i-1}^n$ ,  $u_i^n$  et  $u_{i+1}^n$  forment une suite monotone
- La reconstruction linéaire basée sur cette suite est monotone si la suite constituée des cinq valeurs  $u_{i-1}^n$ ,  $u_{i-\frac{1}{2}}^+$ ,  $u_i^n$ ,  $u_{i+\frac{1}{2}}^+$  et  $u_{i+1}^n$  est également monotone**

## Suite linéaire monotone

- Supposons d'abord que  $u_{i-1}^n$ ,  $u_i^n$  et  $u_{i+1}^n$  forment une suite croissante
- Pour que la suite linéaire associée soit linéaire, il faut s'assurer que

$$u_{i-1}^n \leq u_{i-\frac{1}{2}}^+ \leq u_i^n \quad \text{et} \quad u_i^n \leq u_{i+\frac{1}{2}}^- \leq u_{i+1}^n$$

- On obtient immédiatement les conditions suivantes sur  $\delta u_i^n$

$$0 \leq \delta u_i^n \leq \min\left(\frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x_i}, \frac{1}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i}\right)$$

- Pour le cas d'une suite décroissante, nous aurions obtenu

$$0 \geq \delta u_i^n \geq \min\left(\frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x_i}, \frac{1}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i}\right)$$

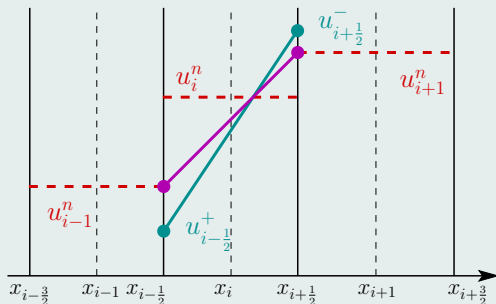
- Dans le cas d'une suite non monotone, on va souhaiter annuler la pente

## Limiteur de pente

- Afin d'assurer ces conditions, nous introduisons la pente limitée  $\widetilde{\delta u_i^n}$  et

$$u_h^{j,n} = u_i^n + (x - x_j) \widetilde{\delta u_i^n}$$

# Limiteur minmod



- Les conditions précédentes peuvent être mis sous une seule

$$\widetilde{\delta u_i^n} = \text{minmod} \left( \delta u_i^n, \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x_i}, \frac{1}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} \right)$$

- La fonction minmod est définie pour tout triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par

$$\text{minmod}(x, y, z) = \min(0, \max(x, y, z)) + \max(0, \min(x, y, z))$$

# Advection linéaire d'un créneau

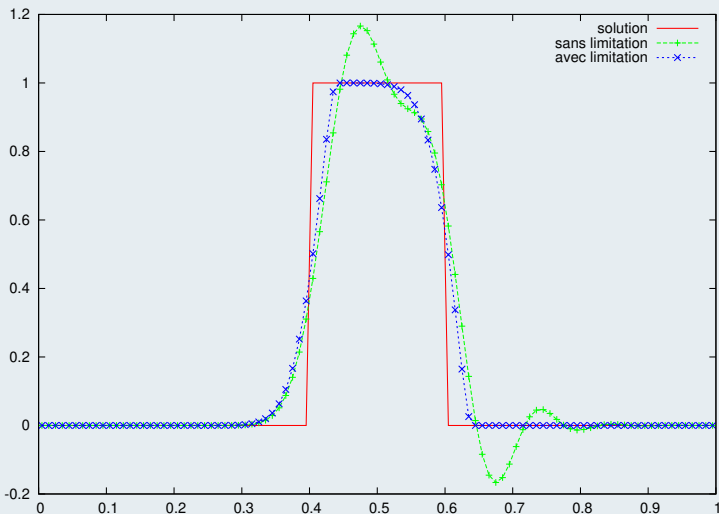


Figure : Comparaison entre solution limitée et solution non-limitée



## Phénomène de Gibbs

- Les schémas d'ordre élevé produisent des oscillations près des discontinuités
- Peut entraîner des instabilités, des solutions non-admissibles, crash
- Vaste littérature sur comment se prévenir ce phénomène :

⇒ limitations *a priori* et ***a posteriori***

### Limitation *a priori*

- Viscosité artificielle
- Limiteurs de pentes ou de moments
- Limiteur hiérarchique
- Limiteurs ENO/WENO

### Limitation *a posteriori*

- MOOD (“Multi-dimensional Optimal Order Detection”)
- Limitation volumes fins de sous-maillages
- **Limitation de sous-maillages par reconstruction de flux**

- 1 Introduction aux EDP
- 2 Résolution analytique des LCS
- 3 Schémas volumes finis appliqués au LCS
- 4 Extension aux ordres élevés
- 5 Phénomène de Gibbs et oscillations parasites
- 6 Correction *a posteriori* de sous-maillages**

# Résolution de sous-maillages des schémas GD

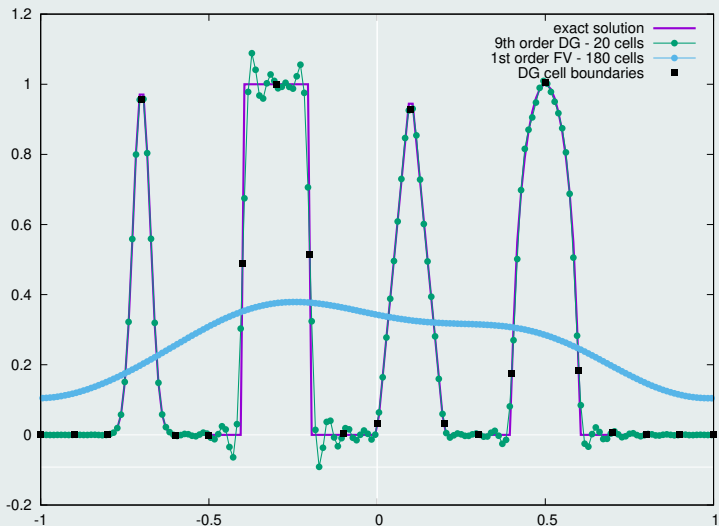


Figure : Advection linéaire d'un signal composite après 4 périodes

# Résolution de sous-maillages des schémas GD

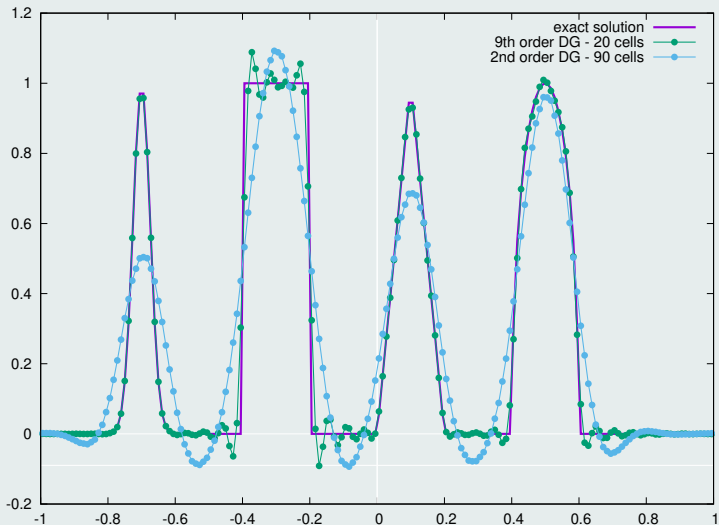


Figure : Advection linéaire d'un signal composite après 4 périodes

## Solution numérique admissible

- Préservation du principe du maximum / de positivité
- Prévenir les crash du code (par exemple empêcher les *NaN*)
- **Assurer la conservation du schéma**

## Oscillations parasites

- Principe du maximum discret
- Condition de relaxation pour les extrema réguliers

## Précision

- Préserver le plus possible la résolution de sous-maille des schémas GD
- Minimiser le nombre de mailles où recalculer la solution

**Modifier localement, à l'échelle des sous-maillages, la solution numérique sans impacter la solution ailleurs dans la maille**

## GD vu comme un schéma VF de sous-maillles

- Réécrire les schémas GD comme un schéma volumes finis particulier
- Expliciter les flux numériques de sous-maillles : **flux reconstruits**

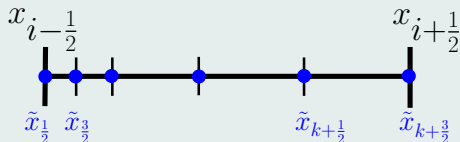
## Formulation variationnelle locale

$$\bullet \int_{\omega_i} \frac{\partial u_h^i}{\partial t} \psi \, dx = \int_{\omega_i} F(u_h^i) \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx - [\mathcal{F} \psi]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \forall \psi \in \mathbb{P}^k(\omega_i)$$

- On remplace  $F(u_h^i)$  par  $F_h^i \in \mathbb{P}^{k+1}(\omega_i)$  (collocation ou projection  $L_2$ )

$$\bullet \int_{\omega_i} \frac{\partial u_h^i}{\partial t} \psi \, dx = - \int_{\omega_i} \frac{\partial F_h^i}{\partial x} \psi \, dx + [(F_h^i - \mathcal{F}) \psi]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \forall \psi \in \mathbb{P}^k(\omega_i)$$

## Décomposition en sous-cellules grâce à $k + 2$ points de flux



## Sous-division et définition

- $\omega_j$  est sous-divisé en  $k + 1$  sous-cellules  $S_m^i = [\tilde{x}_{m-\frac{1}{2}}, \tilde{x}_{m+\frac{1}{2}}]$
- On définit  $\bar{\psi}_m = \frac{1}{|S_m^i|} \int_{S_m^i} \psi \, dx$  les valeurs moyennes de sous-maillles

## Fonctions de base de sous-résolution

- On introduit les  $k + 1$  fonctions de base  $\{\phi_m\}_m$  telles que  $\forall \psi \in \mathbb{P}^k(\omega_j)$

$$\int_{\omega_j} \phi_m \psi \, dx = \int_{S_m^i} \psi \, dx, \quad \forall m = 1, \dots, k + 1,$$

- $\sum_{m=1}^{k+1} \phi_m(x) = 1$

**Ces fonctions bien particulières peuvent être vues comme la projection  $L_2$  des fonctions indicatrices  $\mathbb{1}_m(x)$  sur  $\mathbb{P}^k(\omega_j)$**

## Schéma volumes finis de sous-maillages

$$\bullet \int_{\omega_i} \frac{\partial u_h^i}{\partial t} \phi_m \, dx = - \int_{\omega_i} \frac{\partial F_h^i}{\partial x} \phi_m \, dx + \left[ (F_h^i - \mathcal{F}) \phi_m \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$\bullet |S_m^i| \frac{\partial \bar{u}_m^i}{\partial t} = - \int_{S_m^i} \frac{\partial F_h^i}{\partial x} \, dx + \left[ (F_h^i - \mathcal{F}) \phi_m \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$\bullet \frac{\partial \bar{u}_m^i}{\partial t} = - \frac{1}{|S_m^i|} \left( \left[ F_h^i \right]_{\tilde{x}_{m-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{m+\frac{1}{2}}} - \left[ \phi_m (F_h^i - \mathcal{F}) \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\bullet \frac{\partial \bar{u}_m^i}{\partial t} = - \frac{1}{|S_m^i|} \left( \hat{F}_{m+\frac{1}{2}}^i - \hat{F}_{m-\frac{1}{2}}^i \right)$$

volumes finis de sous-maillages

## Système linéaire

$$\bullet \hat{F}_{m+\frac{1}{2}}^i - \hat{F}_{m-\frac{1}{2}}^i = \left[ F_h^i \right]_{\tilde{x}_{m-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{m+\frac{1}{2}}} - \left[ \phi_m (F_h^i - \mathcal{F}) \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \forall m \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$$

$$\bullet \hat{F}_{\frac{1}{2}}^i = \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \hat{F}_{k+\frac{3}{2}}^i = \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$$



## Flux reconstruits

- $\widehat{F}_{m+\frac{1}{2}}^i = F_h^i(\widetilde{x}_{m+\frac{1}{2}}) - C_{m+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \left( F_h^i(x_{i-\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} \right) - C_{m+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \left( F_h^i(x_{i+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} \right)$
- $C_{m+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} = \sum_{p=m+1}^{k+1} \phi_p(x_{i-\frac{1}{2}})$     et     $C_{m+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = \sum_{p=1}^m \phi_p(x_{i+\frac{1}{2}})$

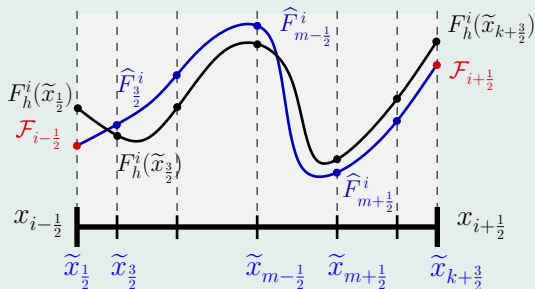
## Correction pour une distribution symétrique des points $\{\widetilde{x}_{m+\frac{1}{2}}\}_m$

- Soit  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k+1}$  défini comme  $B_j = (-1)^{j+1} \binom{k+j}{j} \binom{k+1}{j}$
- $\widetilde{\xi}_{m+\frac{1}{2}} = \frac{\widetilde{x}_{m+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}, \quad \forall m = 0, \dots, k+1$
- $C_{m+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} = 1 - \left( \widetilde{\xi}_{m+\frac{1}{2}}, \dots, (\widetilde{\xi}_{m+\frac{1}{2}})^{k+1} \right)^t \cdot \mathbf{B}$     et     $C_{m+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = C_{k+\frac{3}{2}-m}^{i-\frac{1}{2}}$

## Volumes fins de sous-maillages équivalent à Galerkin discontinu

- $$\int_{\omega_i} \frac{\partial u_h^i}{\partial t} \psi \, dx = \int_{\omega_i} F(u_h^i) \frac{\partial \psi}{\partial X} \, dx - [\mathcal{F} \psi]_{x_{i-\frac{1}{2}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}}, \quad \forall \psi \in \mathbb{P}^k(\omega_i)$$
- $$\frac{\partial \bar{u}_m^i}{\partial t} = -\frac{1}{|S_m^i|} \left( \widehat{F}_{m+\frac{1}{2}}^i - \widehat{F}_{m-\frac{1}{2}}^i \right), \quad \forall m = 1, \dots, k+1$$
- $$\widehat{F}_{m+\frac{1}{2}}^i = F_h^i(\tilde{x}_{m+\frac{1}{2}}) - C_{m+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \left( F_h^i(x_{i-\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} \right) - C_{m+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \left( F_h^i(x_{i+\frac{1}{2}}) - \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} \right)$$

## Flux reconstruits prenant en compte les sauts de flux



## Schéma RK-GD

- Runge-Kutta *Strong-Stability preserving* (SSP): combinaisons convexes de schémas d'ordre 1 Euler explicites
- On peut donc se concentrer sur Euler explicite sans perte de généralité

## Projection sur les sous-maillles de la solution numérique

- $u_h^{i,n}(x) = \sum_{m=1}^{k+1} u_m^{i,n} \sigma_m(x)$  est définie de manière unique par ses  $k + 1$  valeurs moyennes de sous-maillles
- On introduisant la matrice de projection  $\mathbf{\Pi}$  définie comme

$$\pi_{mp} = \frac{1}{|S_m^i|} \int_{S_m^i} \sigma_p \, dx,$$

on a alors

$$\mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} u_1^{i,n} \\ \vdots \\ u_{k+1}^{i,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^{i,n} \\ \vdots \\ \bar{u}_{k+1}^{i,n} \end{pmatrix}$$

## Projection

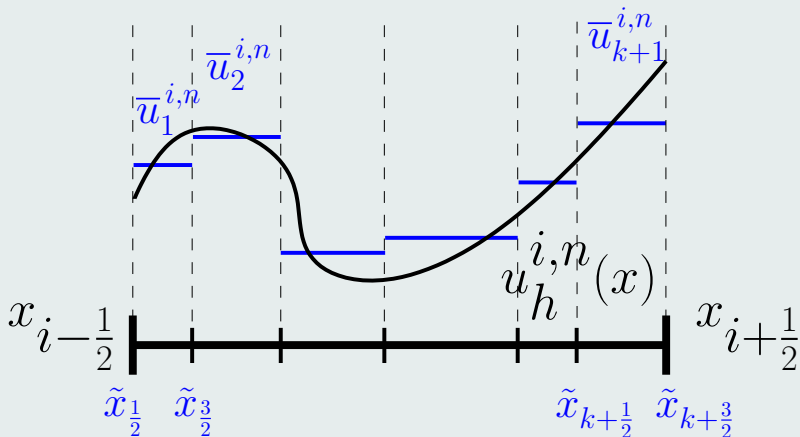


Figure : Solution polynomiale et les sous-valeurs moyennes associées

## Mise en oeuvre

- On considère que, pour chaque cellule, les  $\{\bar{u}_m^{i,n}\}_m$  sont admissibles
- On calcule une solution candidate  $u_h^{n+1}$  à partir de  $u_h^n$  par le schéma GD
- Pour chaque sous-maille, vérifier si les  $\{\bar{u}_m^{i,n+1}\}_m$  sont admissibles

## Détection d'Admissibilité Physique (DAP)

- Vérifier si  $\bar{u}_m^{i,n+1}$  appartient à un ensemble d'admissibilité physique convexe (principe du maximum pour les LCS, positivité de la pression et de la densité pour Euler, ...)
- Vérifier l'apparition de *NaN* lors du calcul

## Détection d'Admissibilité numérique (DAN)

- Principe du maximum discret sur les sous-valeurs moyennes :

$$\min_p(\bar{u}_p^{i-1,n}, \bar{u}_p^{i,n}, \bar{u}_p^{i+1,n}) \leq \bar{u}_m^{i,n+1} \leq \max_p(\bar{u}_p^{i-1,n}, \bar{u}_p^{i,n}, \bar{u}_p^{i+1,n})$$

- Ce critère doit être relaxer pour préserver les extrema régulier

## Correction du flux reconstruit

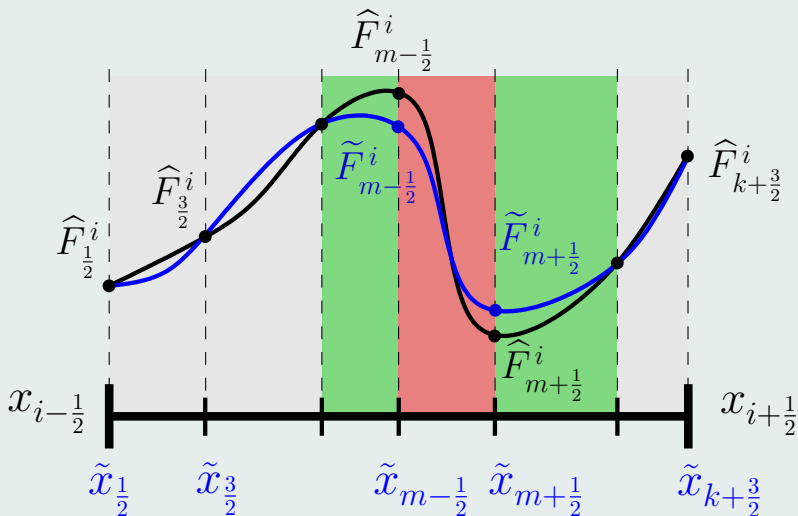


Figure : Correction du flux reconstruit

## Procédure

- 1 Calculer la solution GD non-corrigée  $u_h^{i,n+1}$
- 2 Projeter  $u_h^{i,n+1}$  pour avoir les sous-valeurs moyennes  $\bar{u}_m^{i,n+1}$
- 3 Vérifier  $\bar{u}_m^{i,n+1}$  par les critères de détection plus relaxation
- 4 Si  $\bar{u}_m^{i,n+1}$  est admissible, on avance en temps, sinon on modifie les flux reconstruits correspondants

$$\tilde{F}_{m-1}^i = \mathcal{F}(\bar{u}_{m-1}^{i,n}, \bar{u}_m^{i,n}) \quad \text{et} \quad \tilde{F}_m^i = \mathcal{F}(\bar{u}_m^{i,n}, \bar{u}_{m+1}^{i,n})$$

- 5 Par le flux reconstruit corrigé, recalculer les sous-valeurs moyennes des sous-maillages détectés et leurs premières voisines
- 6 Revenir à 3

## Conclusion

- La limitation affecte seulement la solution GD à l'échelle de la sous-maille
- Le schéma corrigé est conservatif au niveau de la sous-maillages
- En pratique, très peu de sous-valeurs moyennes doivent être recalculées

## Solution initiale sur $x \in [0, 1]$

- $u_0(x) = \sin(2\pi x)$
- Conditions aux bords périodiques

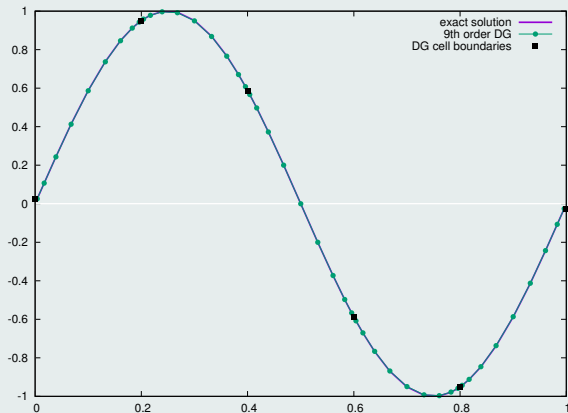


Figure : Advection linéaire avec un schéma GD d'ordre 9 et 5 mailles à  $t = 1$



## Taux de convergence

	$L_1$		$L_2$	
$h$	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$
$\frac{1}{20}$	8.07E-11	9.00	8.97E-11	9.00
$\frac{1}{40}$	1.58E-13	9.00	1.75E-13	9.00
$\frac{1}{80}$	3.08E-16	-	3.42E-16	-

**Table:** Taux de convergence pour l'advection linéaire pour GD ordre 9

# Advection linéaire d'un signal carré après une période

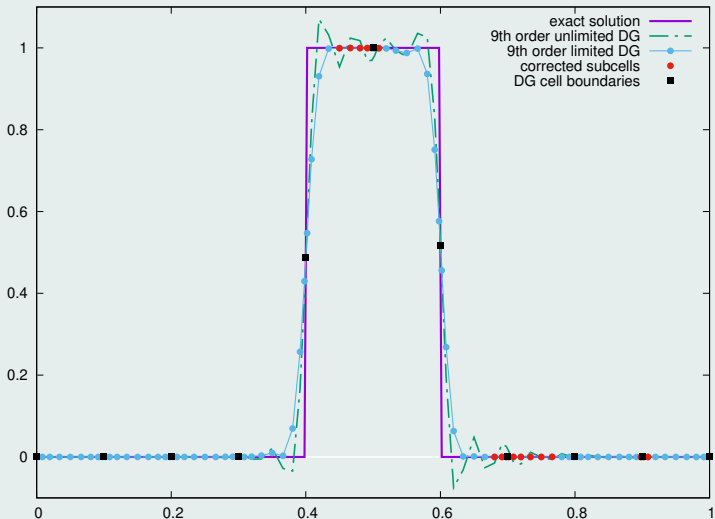
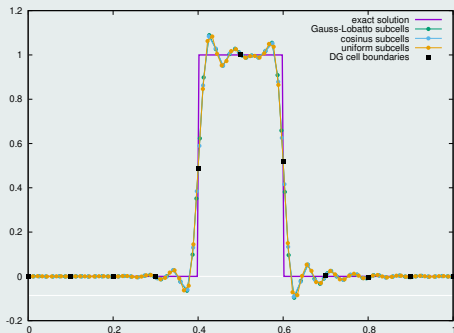
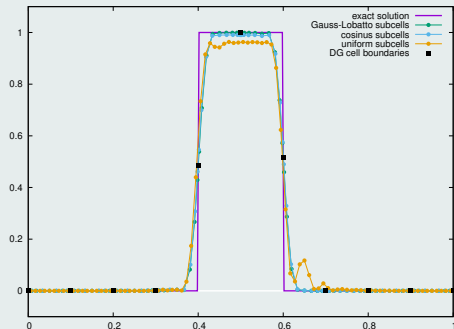


Figure : Schéma GD d'ordre 9 corrigé et non-corrigé

# Advection linéaire d'un signal carré après 10 périodes



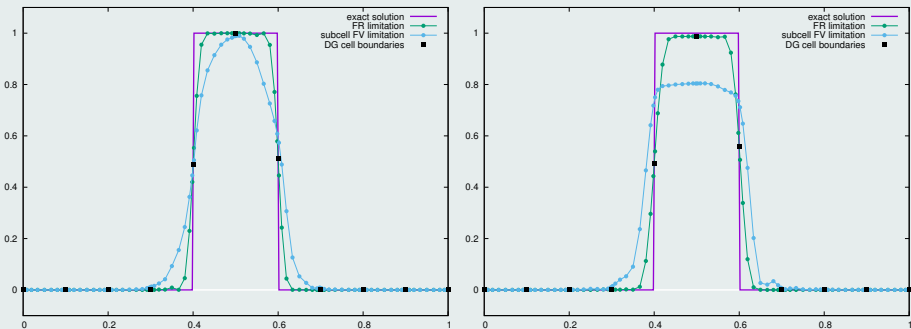
(a) Sans correction



(b) Avec correction

Figure : Comparaison entre différentes sous-divisions

# Advection linéaire d'un signal carré

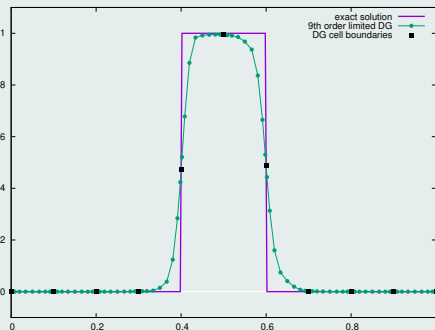


(a) Après 1 période

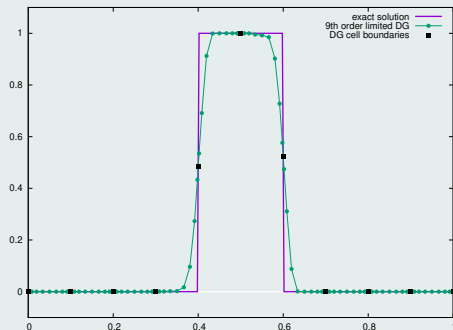
(b) Après 50 périodes

Figure : Comparaison entre limitations de sous-maillles

# Advection linéaire d'un signal carré



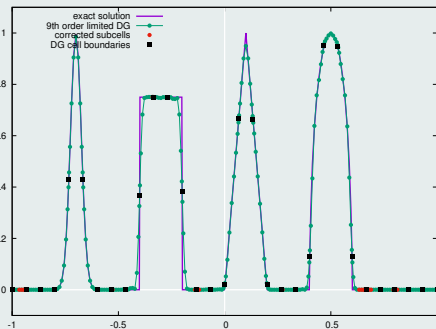
(a) Correction d'ordre 1



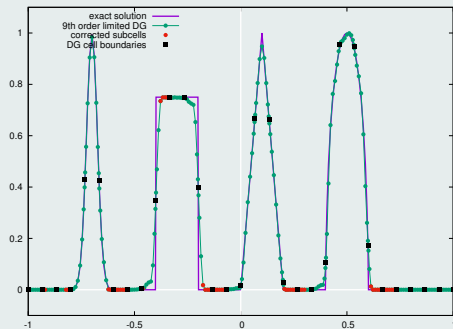
(b) Correction d'ordre 2

Figure : Comparaison entre les corrections d'ordre 1 et 2 pour le critère sousDAN

# Advection linéaire d'un signal composite après 4 périodes



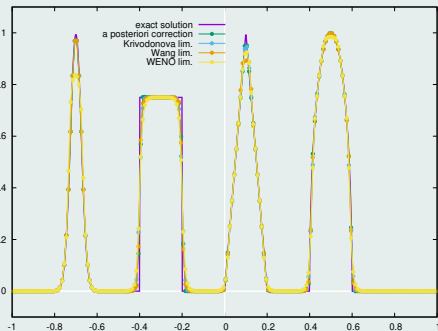
(a) DAN et correction d'ordre 1



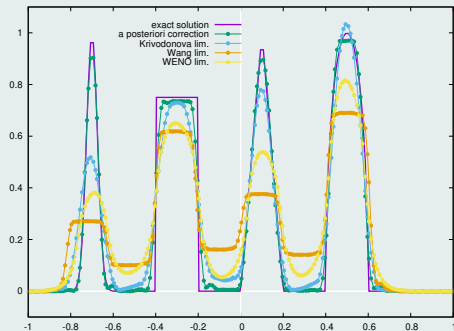
(b) sousDAN et correction d'ordre 2

Figure : GD corrigé d'ordre 9 sur 30 mailles

# Advection linéaire d'un signal composite après 4 périodes



(a) 200 mailles: valeurs moyennes



(b) 50 mailles: sous-valeurs moyennes

Figure : GD d'ordre 4 avec différentes limitations

## Advection linéaire d'un signal composite après 4 périodes

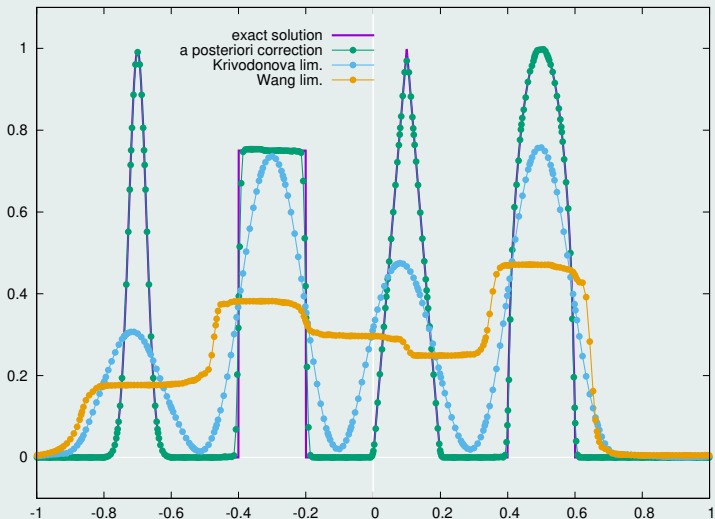


Figure : GD d'ordre 9 avec différentes limitations sur 30 mailles



# Équation de Burgers: $u_0(x) = \sin(2\pi x)$

Figure : GD corrigé d'ordre 9 sur 10 mailles à  $t_f = 0.7$

# Équation de Burgers : collision entre choc et détente

Figure : GD d'ordre 9 corrigé sur 15 mailles à  $t_f = 1.2$

# Équation de Burgers : collision entre choc et détente

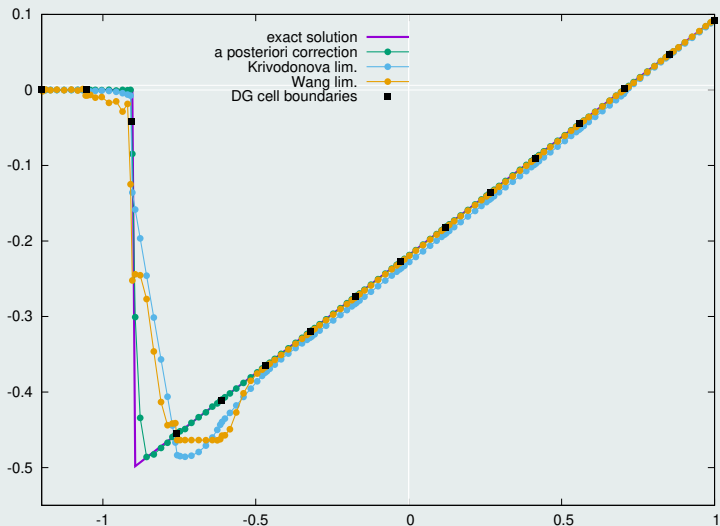


Figure : GD d'ordre 9 avec différentes limitations sur 15 mailles

## Flux non-convexe de Buckley à $t = 0.4$

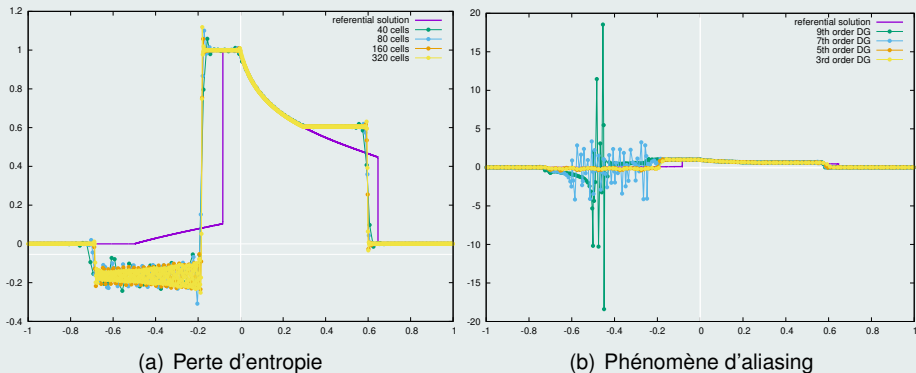


Figure : Solution GD non-corrigée pour Buckley

## Flux non-convexe de Buckley à $t = 0.4$

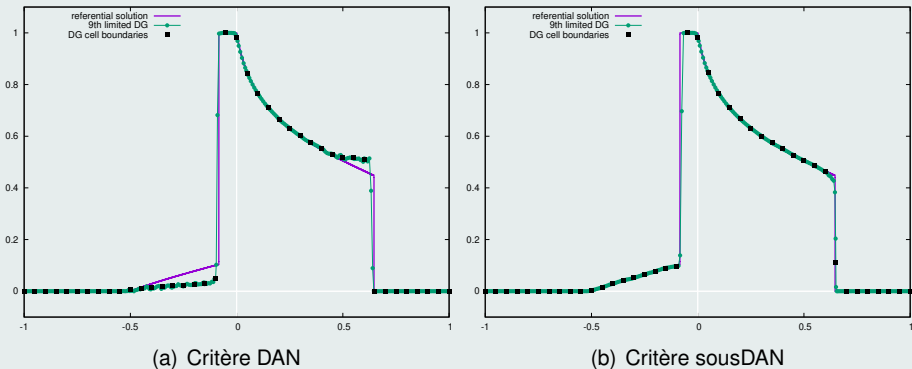
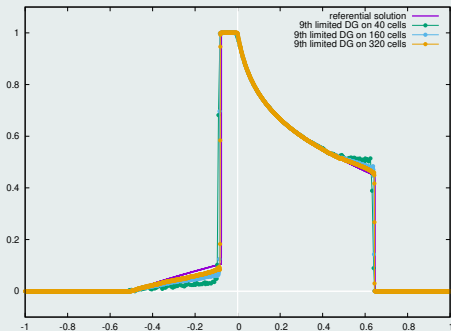
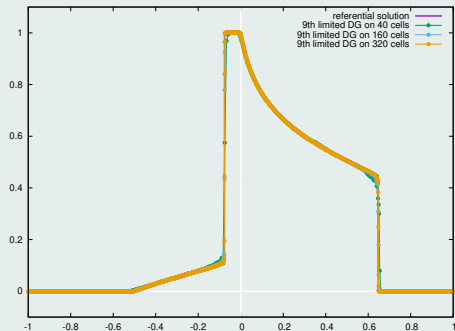


Figure : Solution GD d'ordre 9 sur 40 mailles

Flux non-convexe de Buckley à  $t = 0.4$ 

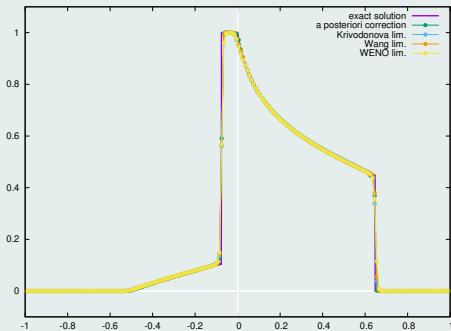
(a) Critère DAN



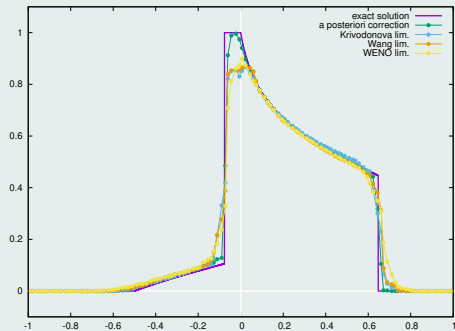
(b) Critère sousDAN

Figure : Analyse de convergence pour GD d'ordre 9

# Flux non-convexe de Buckley à $t = 0.4$



(a) 200 cells: valeurs moyennes



(b) 30 mailles: sous-valeurs moyennes

Figure : GD d'ordre 4 avec différentes limitations

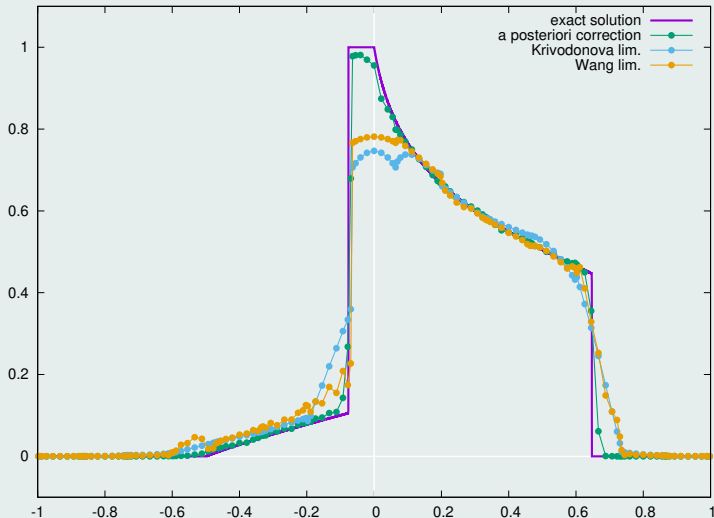
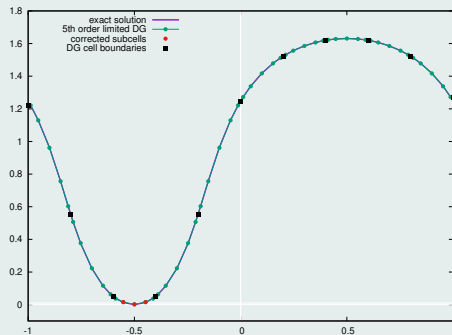
Flux non-convexe de Buckley à  $t = 0.4$ 

Figure : GD d'ordre 9 avec différentes limitations sur 15 mailles

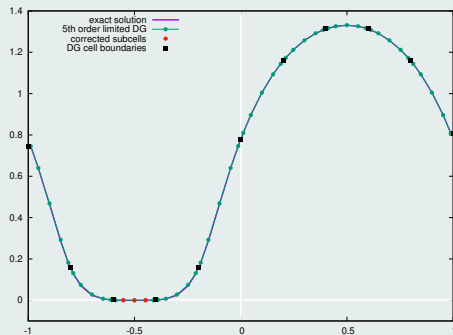


## Solution initiale sur $x \in [0, 1]$ pour $\gamma = 3$

- $\rho_0(x) = 1 + 0.9999999 \sin(\pi x)$ ,  $u_0(x) = 0$ ,  $p_0(x) = (\rho_0(x))^\gamma$   
 $\implies \rho_0(-\frac{1}{2}) = 1.E - 7$  et  $p_0(-\frac{1}{2}) = 1.E - 21$
- Conditions aux limites périodiques



(a) Densité



(b) Énergie interne

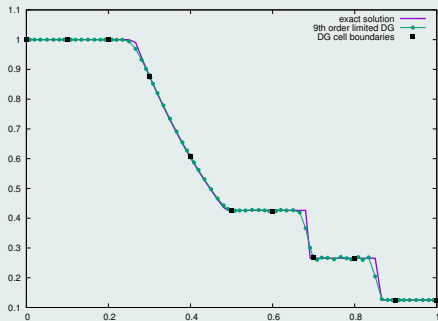
Figure : GD d'ordre 5 corrigé sur 10 mailles à  $t = 0.1$

## Taux de convergence

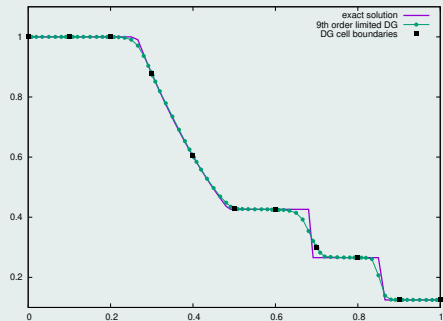
$h$	$L_1$		$L_2$		% moyens des sous-maillages corrigées
	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$	
$\frac{1}{20}$	1.48E-5	4.35	2.02E-5	4.18	6.87 %
$\frac{1}{40}$	9.09E-7	4.88	1.38E-6	4.87	3.31 %
$\frac{1}{80}$	3.09E-8	4.95	4.73E-8	4.86	2.50 %
$\frac{1}{160}$	1.00E-9	-	1.63E-9	-	1.12 %

**Table:** Taux de convergence sur la pression pour Euler avec GD d'ordre 5

# Tube à choc de Sod



(a) DAN + 1st order correction



(b) sousDAN + 2nd order correction

Figure : 9th order corrected DG on 10 cells

# Sod shock tube problem

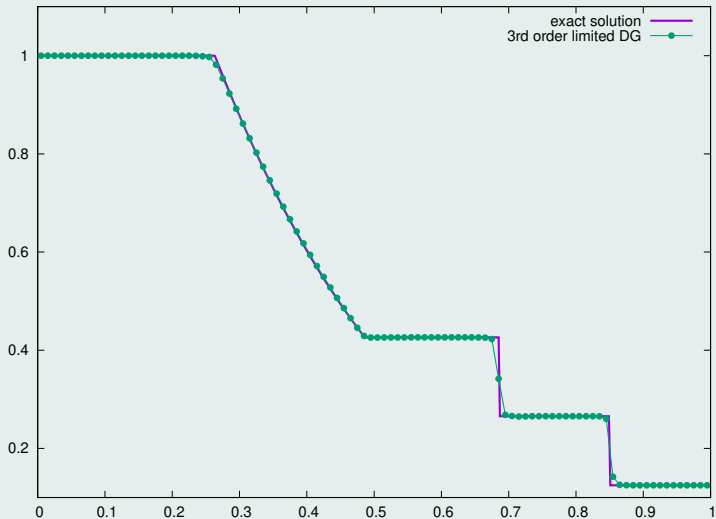
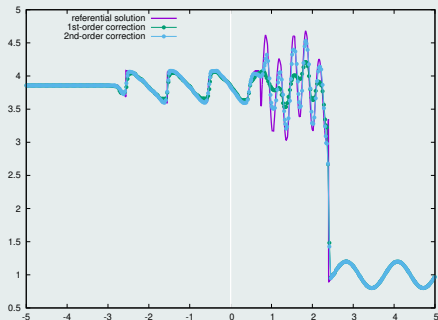
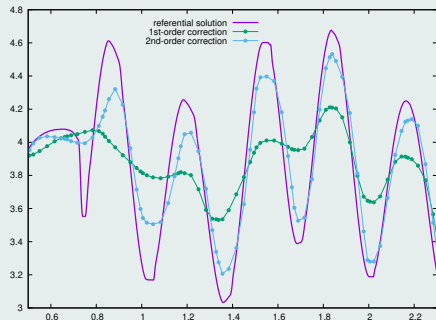


Figure : 3rd order DG solutions on 100 cells: cell mean values

# Shock acoustic-wave interaction problem



(a) Global view



(b) Zoom on  $[0.5, 2.3]$

**Figure :** 7th order corrected DG on 50 cells: comparison between 1st et 2nd order corrections

# Shock acoustic-wave interaction problem

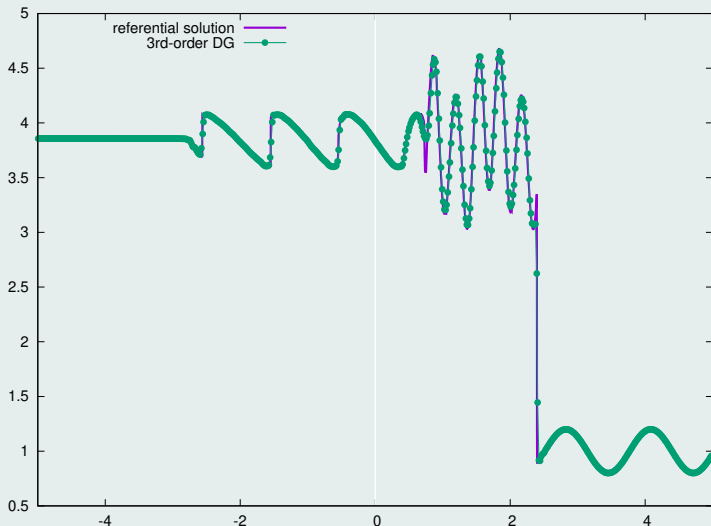


Figure : 3rd order corrected DG solutions on 200 cells: cell mean values

# Blast waves interaction problem

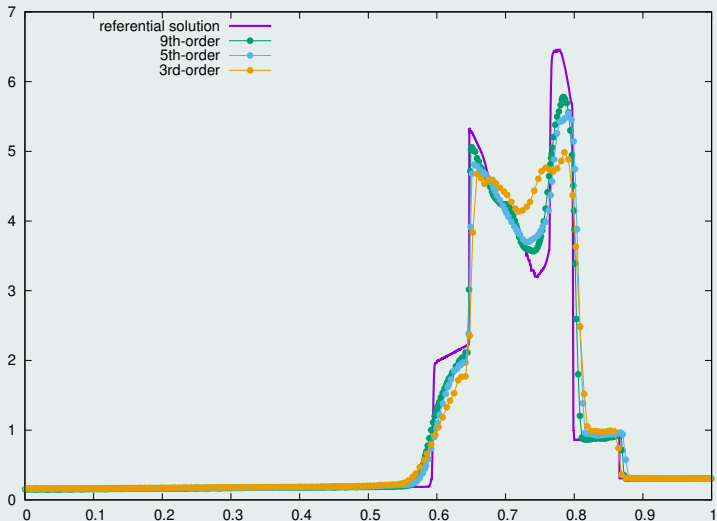
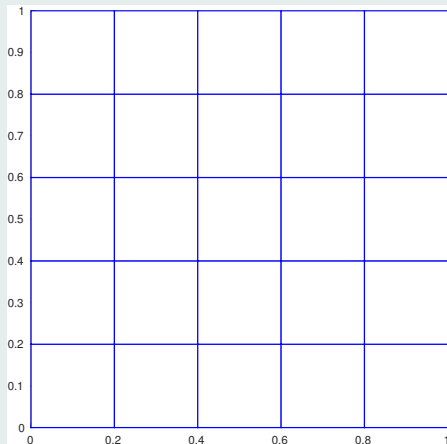
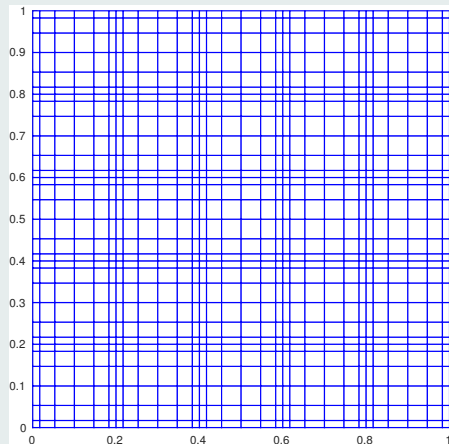


Figure : Corrected DG solution on 60 cells, from 3rd to 9th order

## 2D grid et subgrid



(a) Grid



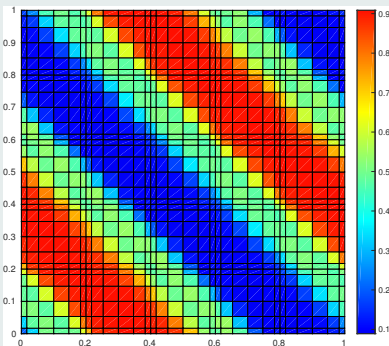
(b) Subgrid

**Figure :** 5x5 Cartesian grid et correspondant subgrid for a 6th order DG scheme

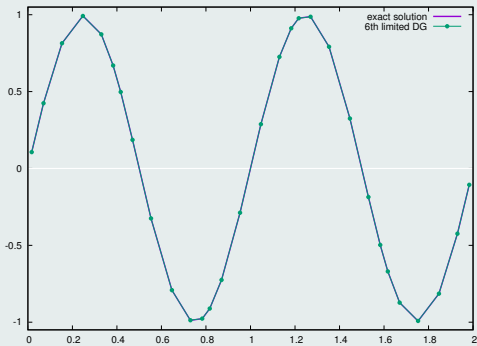


# Initial solution on $(x, y) \in [0, 1]^2$

- $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$
- Periodic boundary conditions



(a) Solution map



(b) Solution profile

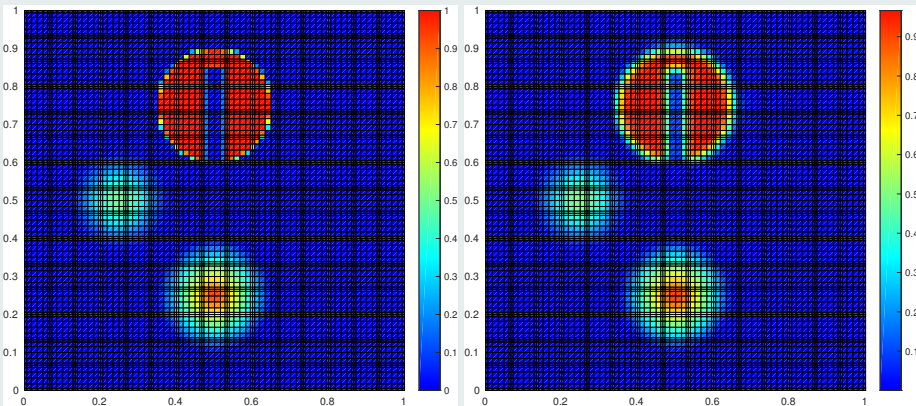
Figure : Linear advection with a 6th DG scheme et 5x5 grid after 1 period

## Convergence rates

$h$	$L_1$		$L_2$	
	$E_{L_1}^h$	$q_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	$q_{L_2}^h$
$\frac{1}{5}$	2.10E-6	6.23	2.86E-6	6.24
$\frac{1}{10}$	2.79E-8	6.00	3.77E-8	6.00
$\frac{1}{20}$	3.36E-10	-	5.91E-10	-

**Table:** Convergence rates for the linear advection case for a 6th order DG scheme

# Rotation of a composite signal after 1 period

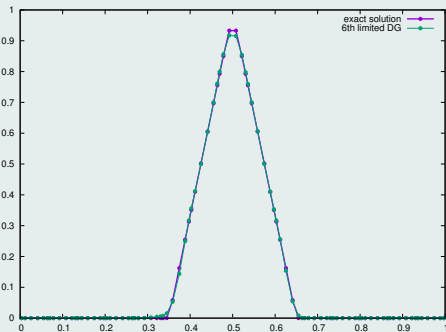


(a) Initial solution

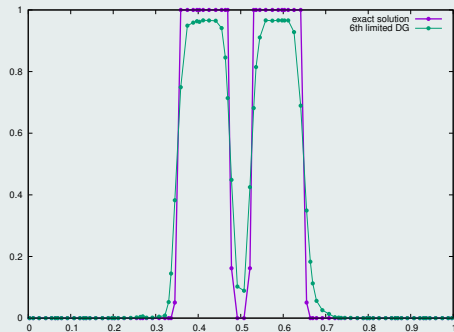
(b) Final solution

Figure : 6th order corrected DG on a 15x15 Cartesian mesh

## Rotation of a composite signal after 1 period



(a) Solution profile for  $y = 0.25$



(b) Solution profile for  $y = 0.75$

Figure : 6th order corrected DG on a 15x15 Cartesian mesh

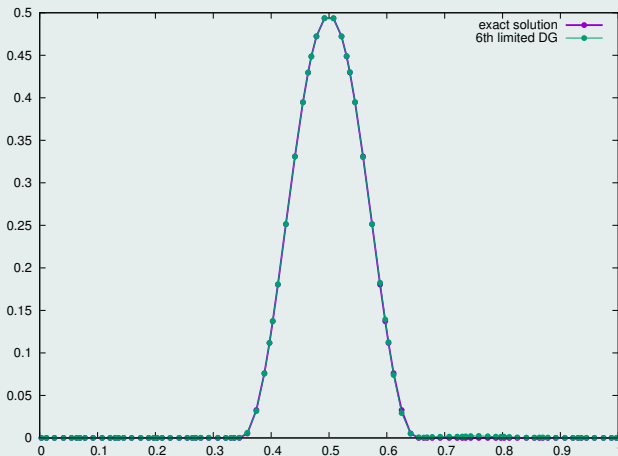
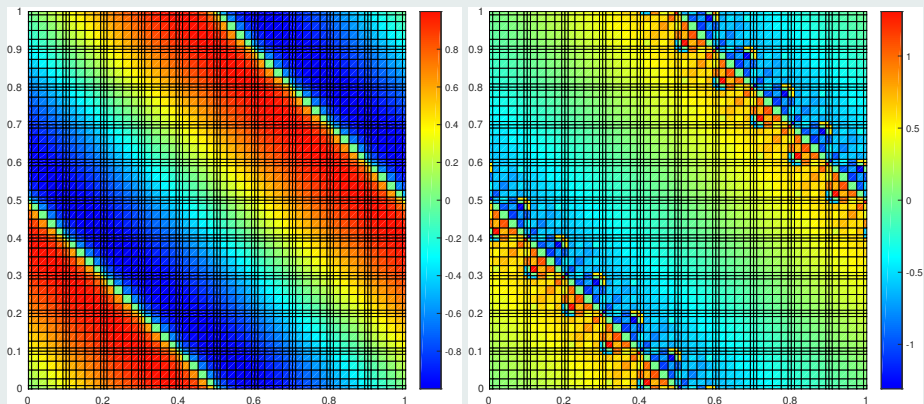
Rotation of a composite signal after 1 period:  $x = 0.25$ 

Figure : 6th order corrected DG on a 15x15 Cartesian mesh

# Burgers equation with $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$



(a) Solution at  $t = 0.007$

(b) Solution at  $t = 0.25$

Figure : 6th order uncorrected DG on a 10x10 Cartesian mesh

# Burgers equation with $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$

(a) Solution map

(b) Detected subcells

Figure : 6th order corrected DG on a 10x10 Cartesian mesh until  $t = 0.5$

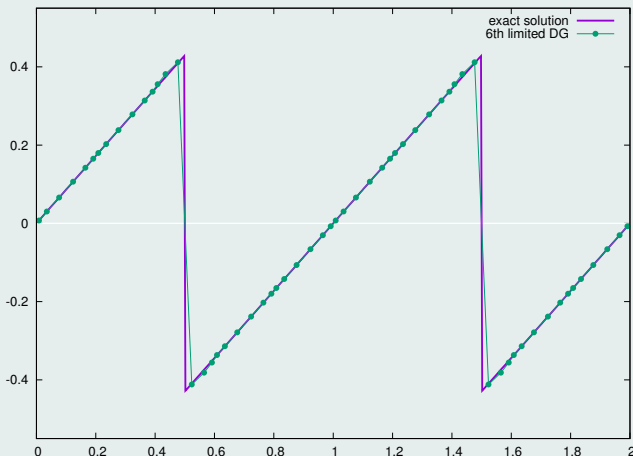
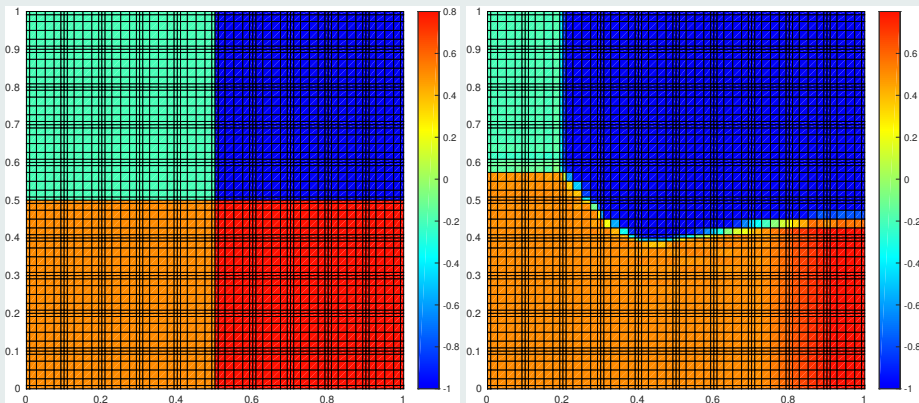
Burgers equation with  $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$  at  $t = 0.5$ 

Figure : 6th order corrected DG solution profile on a 10x10 Cartesian mesh



# Burgers equation with composite signal



(a) Initial solution

(b) Solution at  $t = 0.5$

Figure : 6th order corrected DG on a 10x10 Cartesian mesh

## Kurganov, Petrova, Popov (KPP) non-convex flux problem

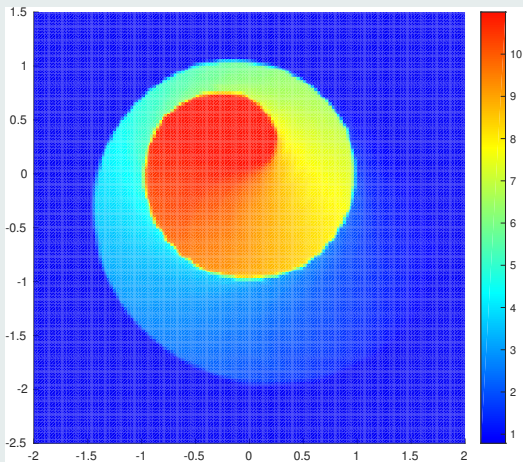


Figure : 6th order corrected DG solution on a 30x30 Cartesian mesh

## Projets en cours

- Extension en non-structuré (avec R. Abgrall)
- *Maximum principle preserving DG scheme through subcell FCT reconstructed flux* (avec G. Gassner)
- *DoF based h-p adaptive DG scheme through subcell finite volume formulation* (avec R. Loubère et S. Clain)

## Article publié



F. VILAR, *A Posteriori Correction of High-Order Discontinuous Galerkin Scheme through Subcell Finite Volume Formulation et Flux Reconstruction*. JCP, 2018.