

# Résolution des lois de conservation scalaires

## École Mathématique Africaine

**François Vilar**

Institut Montpellierain Alexander Grothendieck  
Université de Montpellier

Août 2019



**IMAG**  
INSTITUT MONTPELLIERAIN  
ALEXANDER GROTHENDIECK



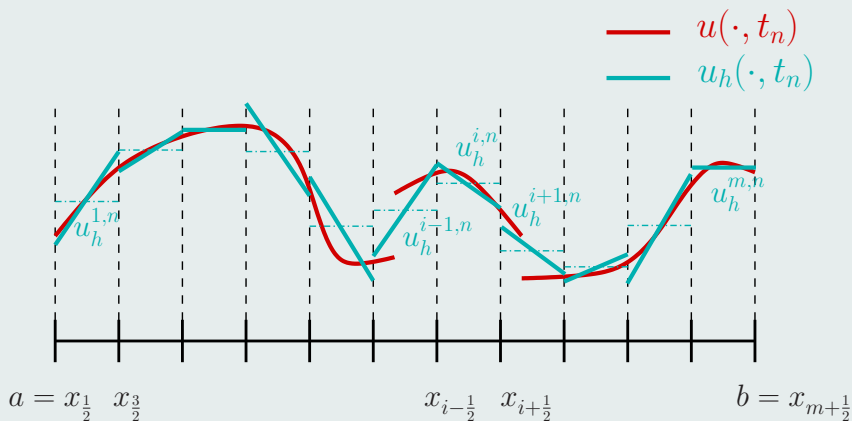
- 1 Introduction aux EDP
- 2 Résolution analytique des LCS
- 3 Schémas volumes finis appliquées au LCS
- 4 Extension aux ordres élevés
- 5 Phénomène de Gibbs et oscillations parasites
- 6 Correction *a posteriori* de sous-mailles

- 1 Introduction aux EDP
- 2 Résolution analytique des LCS
- 3 Schémas volumes finis appliquées au LCS
- 4 Extension aux ordres élevés**
- 5 Phénomène de Gibbs et oscillations parasites
- 6 Correction *a posteriori* de sous-mailles

# Introduction

- Schéma VF d'ordre 1 : approximation constante par morceaux
- La diffusion numérique provient des sauts  $u_{i+1}^n - u_i^n$  dans  $\mathcal{F}(u_i^n, u_{i+1}^n)$

↪ **Reconstruction linéaire par morceaux de la solution**





## Définitions

- Sur la maille  $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  et au temps  $t_n$ , la solution numérique s'écrit

$$\begin{aligned} u_h(x, t_n)|_{C_i} &= u_h^{i,n}(x), \\ &= u_i^n + (x - x_i) \delta u_i^n \end{aligned}$$

- $x_i = \frac{1}{2} (x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})$  est le point milieu de la maille  $C_i$
- $u_i^n$  est la valeur moyenne sur la maille  $C_i$  tel que

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{C_i} u_h^{i,n}(x) dx = u_i^n$$

- $\delta u_i^n$  est la pente de la solution sur la maille  $C_i$

## Comment calculer $u_i^n$ et $\delta u_i^n$ ?

- $u_i^n$  sera calculé par un schéma VF comme précédemment
- $\delta u_i^n$  sera calculé comme une approximation de  $\partial_x u|_{C_i}$  par une approche moindres carrés

## Construction de la pente

- On va contruire la pente  $\delta u_i^n$  à partir des valeurs moyennes  $u_i^n$
- La reconstruction  $u_h^{i,n}$  étant conservative, on a bien que

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{C_i} u_h^{i,n}(x) dx = u_i^n$$

- Afin de préserver les champs linéaires, on va imposer les conditions

$$\begin{aligned} u_{i-1}^n &= \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \int_{C_{i-1}} u_h^{i,n}(x) dx & \text{et} & & u_{i+1}^n &= \frac{1}{\Delta x_{i+1}} \int_{C_{i+1}} u_h^{i,n}(x) dx \\ &= u_h^{i,n}(x_{i-1}) & & & &= u_h^{i,n}(x_{i+1}) \end{aligned}$$

- On cherche donc la droite qui passe le mieux par les trois points  $(x_{i-1}, u_{i-1}^n)$ ,  $(x_i, u_i^n)$  et  $(x_{i+1}, u_{i+1}^n)$

## Moindres carrés

- On va minimiser la fonction coût  $L(\delta u_i^n)$  suivante

$$\begin{aligned} L(\delta u_i^n) &= \frac{1}{2} \left( (u_h^{i,n}(x_{i-1}) - u_{i-1}^n)^2 + (u_h^{i,n}(x_{i+1}) - u_{i+1}^n)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (u_i^n - u_{i-1}^n - \delta u_i^n (x_i - x_{i-1}))^2 + (u_i^n - u_{i+1}^n + \delta u_i^n (x_{i+1} - x_i))^2 \right) \end{aligned}$$

- On calcule sa dérivée

$$\begin{aligned} L'(\delta u_i^n) &= (x_{i+1} - x_i) (u_i^n - u_{i+1}^n + \delta u_i^n (x_{i+1} - x_i)) \\ &\quad - (x_i - x_{i-1}) (u_i^n - u_{i-1}^n - \delta u_i^n (x_i - x_{i-1})) \end{aligned}$$

- En résolvant  $L'(\delta u_i^n) = 0$ , on obtient  $\delta u_i^n$  tel que

$$\delta u_i^n = \frac{(u_{i+1}^n - u_i^n)(x_{i+1} - x_i) + (u_i^n - u_{i-1}^n)(x_i - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_i - x_{i-1})^2}$$

## Remarque

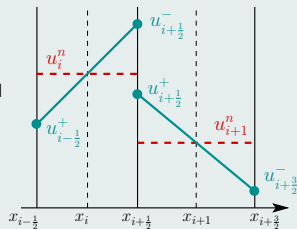
- Dans le cas d'un maillage uniforme,  $\delta u_i^n$  se réécrit

$$\delta u_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x}$$

## Schéma volumes finis d'ordre 2

- Soit  $u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_h^{i,n}(x_{i+\frac{1}{2}})$  et  $u_{i+\frac{1}{2}}^+ = u_h^{i+1,n}(x_{i+\frac{1}{2}})$
- On calcule les nouvelles valeurs moyennes  $u_i^{n+1}$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}})$$



- À noter qu'ici, les flux numériques sont des fonctions des états interpolés

$$\mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} = \mathcal{F}(u_{i-\frac{1}{2}}^-, u_{i-\frac{1}{2}}^+) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}(u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+)$$

## Remarque

- Ce schéma sera bien d'ordre 2 en espace mais seulement 1 en temps
- Pour avoir une discrétisation globalement d'ordre 2, une intégration temporelle plus précise est requise

## Méthodes numériques pour les EDOs

- Soit l'équation différentielle  $\frac{d u(t)}{d t} = \mathcal{L}(t, u(t))$
- En intégrant simplement entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , on obtient

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{L}(t, u(t)) dt$$

- On peut alors construire toute une famille de schéma en approchant par formule de quadrature l'intégrale  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{L}(t, u(t)) dt$

## Exemples

- Rectangle à gauche :  $u_{n+1} = u_n + \Delta t \mathcal{L}(t_n, u_n)$  Euler explicite
- Rectangle à droite :  $u_{n+1} = u_n + \Delta t \mathcal{L}(t_n + \Delta t, u_{n+1})$  Euler implicite
- Trapèze :  $u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2} \left( \mathcal{L}(t_n, u_n) + \mathcal{L}(t_n + \Delta t, u_{n+1}) \right)$  Crank-Nickolson
- Point milieu :  $u_{n+1} = u_n + \Delta t \mathcal{L}(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_{n+\frac{1}{2}})$  Prédicteur-Correcteur

$$u_{n+\frac{1}{2}} = u_n + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{L}(t_n, u_n)$$

## Formule de quadrature à $q$ points : Runge-Kutta (RK)

- $u_{n+1} = u_n + \Delta t \sum_{j=1}^q b_j \mathcal{L}(t_{n,j}, u_{n,j})$
- $u_{n,j} = u_n + \Delta t \sum_{i=1}^q a_{ji} \mathcal{L}(t_{n,i}, u_{n,i})$
- $t_{n,j} = t_n + c_j \Delta t$
- Si  $A = (a_{ij})_{ij}$  est triangulaire strict. inférieure  $\implies$  méthode explicite
- Si  $A = (a_{ij})_{ij}$  est triangulaire inférieure  $\implies$  méthode semi-explicite
- Dans le cas général, la méthode est implicite

$c_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$c_q$	$a_{q1}$	$\dots$	$a_{qq}$
	$b_1$	$\dots$	$b_q$

Table: Tableau de Runge-Kutta

$\implies$  méthode explicite

$\implies$  méthode semi-explicite

## Exemples de schémas Runge-Kutta

- $u_{n,1} = u_n + \Delta t \mathcal{L}(t_n, u_n)$  Runge-Kutta 2  
 $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} (u_{n,1} + \Delta t \mathcal{L}(t_n + \Delta t, u_{n,1}))$
- $u_{n,1} = u_n + \Delta t \mathcal{L}(t_n, u_n)$  Runge-Kutta 3  
 $u_{n,2} = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} (u_{n,1} + \Delta t \mathcal{L}(t_n + \Delta t, u_{n,1}))$   
 $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{2}{3} (u_{n,2} + \Delta t \mathcal{L}(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_{n,2}))$

## Schéma VF d'ordre 2 avec prédicteur-correcteur

**Étape 1** Reconstruction des pentes  $\delta u_i^n$  à partir des valeurs moyennes  $u_i^n$

**Étape 2** Calcul des valeurs interpolées aux interfaces

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i^n + \frac{\Delta x_i}{2} \delta u_i^n \quad \text{et} \quad u_{i+\frac{1}{2}}^+ = u_{i+1}^n - \frac{\Delta x_{i+1}}{2} \delta u_{i+1}^n$$

**Étape 3** Prédiction des valeurs moyennes au temps  $t_{n+\frac{1}{2}}$  par le schéma

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} \left( \mathcal{F}(u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+) - \mathcal{F}(u_{i-\frac{1}{2}}^-, u_{i-\frac{1}{2}}^+) \right)$$

**Étape 4** Reconstruction des pentes  $\delta u_i^{n+\frac{1}{2}}$  à partir des valeurs  $u_i^{n+\frac{1}{2}}$

**Étape 5** Calcul des valeurs interpolées aux interfaces

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x_i}{2} \delta u_i^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad u_{i+\frac{1}{2}}^+ = u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta x_{i+1}}{2} \delta u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}$$

**Étape 6** Calcul des valeurs moyennes au temps  $t_{n+1}$  par le schéma

$$u_i^{n+1} = u_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathcal{F}(u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+) - \mathcal{F}(u_{i-\frac{1}{2}}^-, u_{i-\frac{1}{2}}^+) \right)$$

# Advection linéaire d'un créneau



## Extension aux ordres élevés

- Schéma d'ordre 1 : approximation constante par morceaux
- Schéma d'ordre 2 : approximation linéaire par morceaux
- **Schéma d'ordre  $p \in \mathbb{N}$  : approximation polynomiale par morceaux**

## Méthodes d'ordre élevé

- Méthodes Volumes Finis d'ordre élevé (par moindres carrés)
- Méthodes (W)ENO pour (*Weighted*) *Essentially Non-Oscillatory*
- Méthodes Éléments finis
- **Méthodes Galerkin discontinu**

## Génèse des méthodes Galerkin discontinu (GD)

- Introduites par W. Reed et T. Hill en 1973 pour le transport de neutrons
- Développement majeur par B. Cockburn et C.-W. Shu dans les années 90
- **Une des méthodes les plus utilisées pour la simulation numérique**

## Avantages des méthodes GD

- Arbitrairement précise
- Extrêmement locales (chaque cellule ne voit que ses voisins)
- Adaptées aux adaptations en maillage et précision (adaptation-*hp*)
- Très bonnes propriétés (stabilité  $L_2$ , super-convergence, ...)

## Formulation variationnelle

- On considère toujours l'équation  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$
- $\forall \phi \in \mathcal{C}^1(C_i)$  avec  $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ ,

$$\int_{C_i} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \phi \, dx = 0$$

$$\iff \int_{C_i} \partial_t u \phi \, dx - \int_{C_i} f(u) \partial_x \phi \, dx + [f(u) \phi]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = 0$$

- La dérivée  $\partial_x$  est à présent portée par  $\phi$
- Cette dernière équation un sens dès que  $u(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$

## Méthode Galerkin discontinu : mise en oeuvre

- On considère une solution approchée  $u_{h|C_i} = u_h^i \in \mathbb{P}^k(C_i)$  polynomiale par morceaux telle que

$$u_h^i(t) = \sum_{q=1}^{k+1} u_q^i(t) \sigma_q(x)$$

- $(u_q^i)_q$  : les moments polynomiaux de la solution à calculer
- $(\sigma_q)_q$  : une base de  $\mathbb{P}^k(C_i)$ 
  - $\hookrightarrow$  par exemple : polynômes de Lagrange  
polynômes de Legendre  
polynômes de Taylor
- On restreint l'espace des fonctions test à  $\mathbb{P}^k(C_i)$
- Comme pour les VF, on introduit une fonction flux numérique  $\mathcal{F}$
- La solution approchée sera alors l'unique fonction  $u_h^i \in \mathbb{P}^k(C_i)$  telle que

$$\int_{C_i} \frac{\partial u_h^i}{\partial t} \phi \, dx - \int_{C_i} f(u_h^i) \frac{d\phi}{dx} \, dx + [\mathcal{F} \phi]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = 0, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}^k(C_i)$$

## Méthode Galerkin discontinu : mise en oeuvre

- Pour résoudre ce système, prenons  $\phi$  parmi les fonctions de base

$$\sum_{q=1}^{k+1} \frac{d u_q^i}{dt} \int_{C_i} \sigma_q \sigma_p dx - \int_{C_i} f(u_h^i) \frac{d \sigma_p}{dx} dx + [\mathcal{F} \sigma_p]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = 0, \quad \forall p \in [1, k+1]$$

- On appelle  $M_i = \left( \int_{C_i} \sigma_p \sigma_q dx \right)_{pq}$  la matrice de masse
- Cette matrice est symétrique définie positive, donc inversible
- En introduisant le vecteur  $\sigma = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_{k+1}(x))^t$ , le schéma se réécrit

$$\frac{d \mathbf{u}_i}{dt} = M_i^{-1} \left( \int_{C_i} f(u_h^i) \frac{d \sigma}{dx} dx - \mathcal{F}(u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+) \sigma(x_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{F}(u_{i-\frac{1}{2}}^-, u_{i-\frac{1}{2}}^+) \sigma(x_{i-\frac{1}{2}}) \right)$$

- $\mathbf{u}_i(t) = (u_1^i, \dots, u_{k+1}^i)^t$  est le vecteur contenant les inconnues à calculer
- Les valeurs interpolées aux interfaces sont définies par

$$u_{i\pm\frac{1}{2}}^\mp = u_h^i(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t) = \sum_{q=1}^{k+1} u_q^i(t) \sigma_q(x_{i\pm\frac{1}{2}})$$

## Méthode Galerkin discontinu

- Le terme  $\int_{C_i} f(u_h^i) \frac{d\sigma}{dx} dx$  est appelé terme intérieur
- Le terme  $[\mathcal{F} \sigma]_{x_{i-\frac{1}{2}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}}$  est appelé terme de bord
- De manière analogue aux méthodes volumes finis, on pourra prendre

$$\mathcal{F}(u^-, u^+) = \frac{f(u^-) + f(u^+)}{2} - \frac{\gamma(u^-, u^+)}{2} (u^+ - u^-)$$

## Remarque

- À noter que le choix du flux numérique sera beaucoup moins crucial vis à vis de la précision que ce n'est la cas pour les méthodes VF

## Discrétisation temporelle

- On utilise généralement des méthodes Runge-Kutta explicites
- Dans ce cas, la condition CFL devient bien plus restrictive

↪ Si  $f(u) = c u$ , pour une méthode RK-DG d'ordre  $k + 1$

$$\Delta t \leq \frac{1}{2k+1} \frac{\Delta x}{|c|}$$

# Advection linéaire d'un créneau

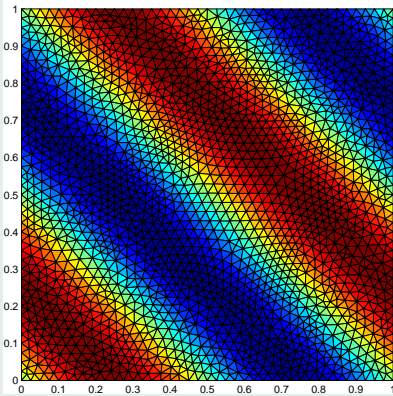
# Advection linéaire d'un créneau

# Burgers : collision entre un choc et une détente - 50 mailles

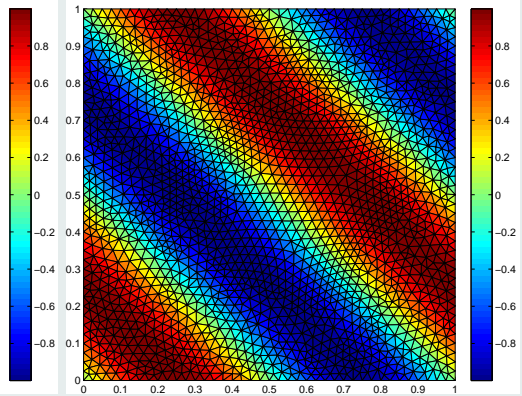


# Système d'Euler : tube à choc de Sod - 100 mailles

Advection linéaire avec  $\mathbf{c} = (1, 1)^t$  et  $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$



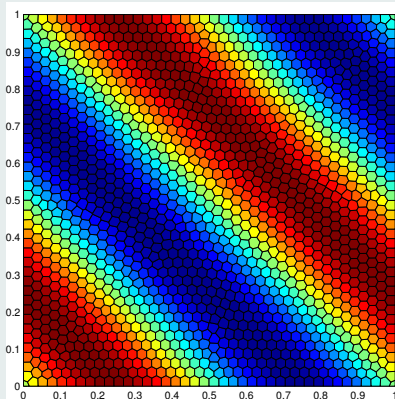
(a) Solution exacte



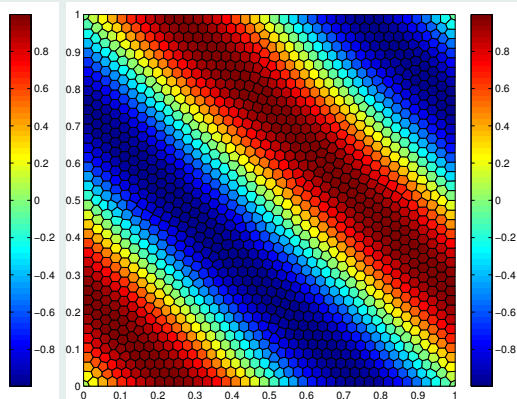
(b) Solution d'ordre 3

**Figure :** Comparaison entre solution numérique et solution exacte après une période sur un maillage constitué de 3860 mailles triangulaires

Advection linéaire avec  $\mathbf{c} = (1, 1)^t$  et  $u_0(x, y) = \sin(2\pi(x + y))$



(a) Solution exacte



(b) Solution d'ordre 3

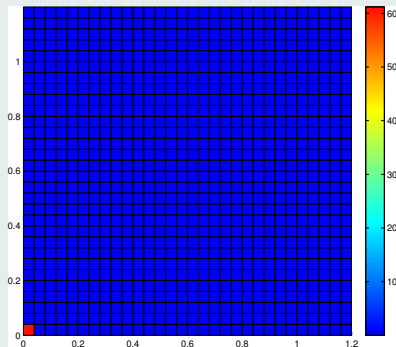
**Figure :** Comparaison entre solution numérique et solution exacte après une période sur un maillage constitué de 1600 mailles polygonales

## Taux de convergence

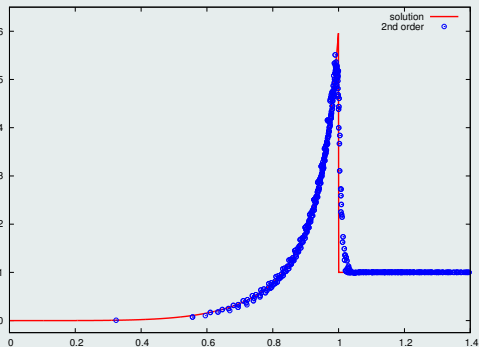
$\mathcal{N}_c$	$L_1$		$L_2$		$L_\infty$	
	$E_{L_1}$	$q_{L_1}$	$E_{L_2}$	$q_{L_2}$	$E_{L_\infty}$	$q_{L_\infty}$
100	1.76E-3	3.12	2.27E-3	3.10	1.14E-2	2.92
400	2.06E-4	3.06	2.65E-4	3.05	1.51E-3	3.08
1600	2.44E-5	2.97	3.19E-5	2.97	1.79E-4	2.96
6400	3.12E-6	3.00	4.07E-6	3.00	2.30E-5	2.93
25600	3.91E-7	-	5.09E-7	-	3.02E-6	-

Table: Taux de convergence pour l'ordre 3

# Dynamique des gaz lagrangienne



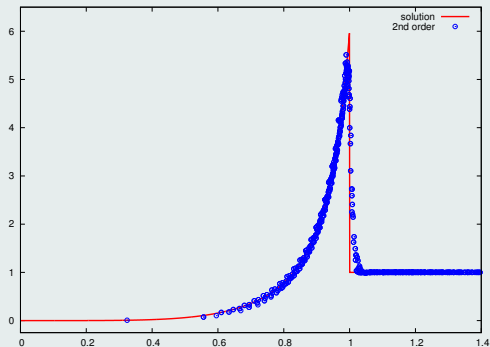
(a) Champ de pression



(b) Profil de densité

Figure : Solution pour un problème de Sedov sur un maille Cartésien  $30 \times 30$

# Dynamique des gaz lagrangienne

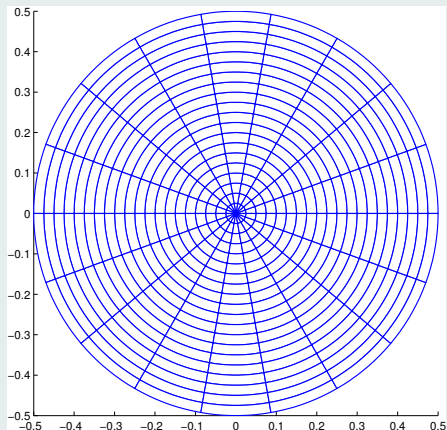


(a) Champ de pression

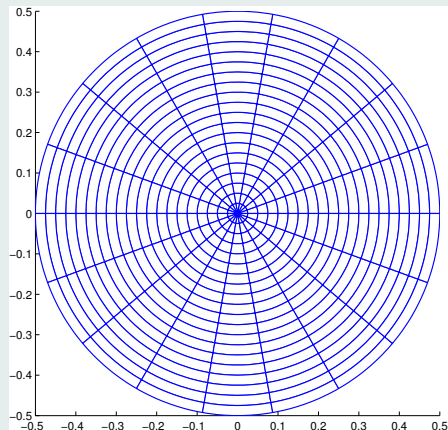
(b) Profil de densité

Figure : Solution pour un problème de Sedov sur un maille Cartésien  $30 \times 30$

# Dynamique des gaz lagrangienne



(a) Ordre 3



(b) Solution exacte

**Figure :** Solutions pour un problème de Gresho, avec un maillage polaire  $20 \times 18$

# Dynamique des gaz lagrangienne

(a) Ordre 3

(b) Solution exacte

**Figure :** Solutions pour un problème de Gresho, avec un maillage polaire  $20 \times 18$



# Précision et temps de calcul pour l'advection linéaire

D.O.F	$m$	$E_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	temps (sec)
600	600	1.47E-1	1.64E-1	8
1200	1200	7.85E-2	8.72E-2	30

Table: Schéma d'ordre 1

D.O.F	$m$	$E_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	temps (sec)
600	300	2.37E-5	2.82E-5	10
1200	600	5.68E-6	6.95E-6	47

Table: Schéma d'ordre 2

D.O.F	$m$	$E_{L_1}^h$	$E_{L_2}^h$	temps (sec)
600	200	8.91E-8	1.33E-7	12
1200	400	1.11E-8	1.67E-8	45

Table: Schéma d'ordre 3

# Comparaison ordre bas et ordre élevé

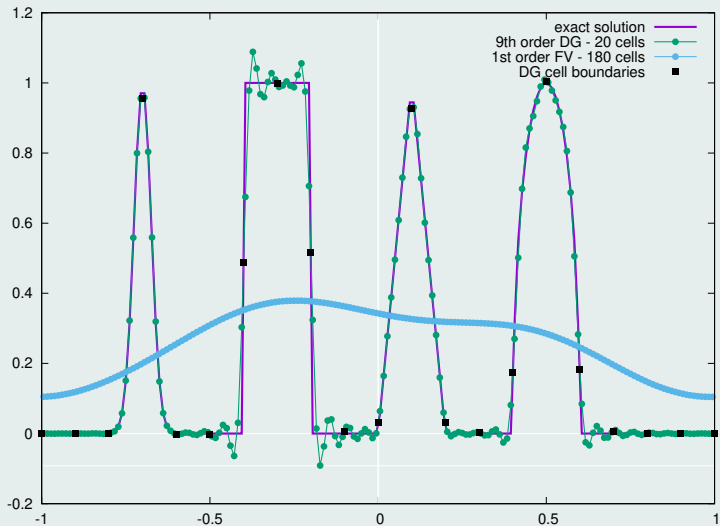


Figure : Advection linéaire d'un signal composite après 4 périodes

## Oscillations parasites : phénomènes de Gibbs

- Les schémas d'ordre élevé produisent des oscillations dans le voisinage de discontinuités
- Cela peut amener à des instabilités non-linéaires, à une solution non-admissible et au crash du code

## GD : schémas entropiques ?

- Pour les LCS, G.-S. Jiang et C.-W. Shu ont démontré la caractère entropique des schémas GD



G.-S. JIANG AND C.-W. SHU. *On cell entropy inequality for discontinuous galerkin method for a scalar hyperbolic equation.* Mathematics of Computation, 1994.

- Cependant, toutes les intégrales doivent être calculées de façon exacte
- Mais comment calculer le terme intérieur  $\int_{C_i} f(u_h^i) \frac{d\sigma}{dx} dx$  si la fonction flux  $f(\cdot)$  est une fonction très complexe ?

## Quadrature et collocation du flux

- Quadrature : Afin de préserver l'ordre de la méthode, une formule de quadrature exacte au moins pour les polynômes  $\mathbb{P}^{2k}$  doit être utilisée
- Collocation : On approche  $f(u_h^i)$  par  $f_h^i \in \mathbb{P}^k$ . Pour cela, on introduit  $k + 1$  points  $(x_r^i)_r$  dans la maille  $C_i$  et on définit  $f_h^i$  comme

$$f_h^i(x, t) = \sum_{q=1}^{k+1} f(u_h^i(x_q^i, t)) L_q^i(x)$$

## Conséquences

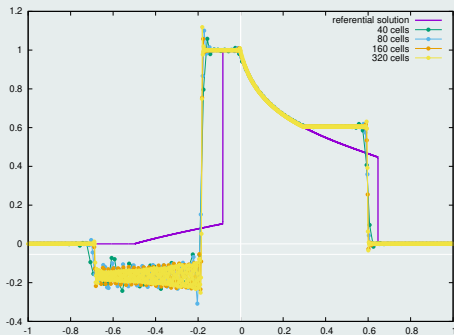
- Perte du caractère entropique des schémas
- Phénomène d'aliasing pouvant mener à de fortes instabilités

## Exemple de quadrature des termes intérieurs

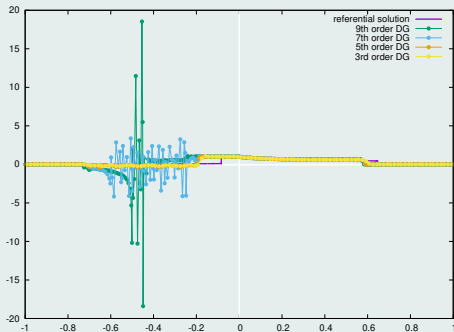
$$\bullet \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in ]-\frac{1}{2}, 0[ \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad \text{où } f(u) = \frac{4u^2}{4u^2 + (1-u)^2}$$

- On utilise une formule de quadrature d'ordre  $2k$

# Problème de Buckley avec les schémas GD



(a) Comportement non-entropique pour GD3



(b) Phénomène d'aliasing

Figure : Solution numérique pour le problème de Buckley

- 1 Introduction aux EDP
- 2 Résolution analytique des LCS
- 3 Schémas volumes finis appliquées au LCS
- 4 Extension aux ordres élevés
- 5 Phénomène de Gibbs et oscillations parasites**
- 6 Correction *a posteriori* de sous-maillages

# ***Charger la suite***